## Question 1

On a : $\sqrt{x^2-x-2}+2x=8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}=8-2x$

C.E. : $x^2-x-2 \geq 0$ et $8-2x \geq 0$

On détermine les racines du trinôme : $-1$ et 2, puis on détermine son signe. La 2e condition s'écrit : $x \leq 4$. Le domaine de l'équation est donc : $D = ]-\infty,-1] \cup [2,4]$.

Alors, en élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}
& x^2-x-2=(8-2x)^2 \\
& \Leftrightarrow x^2-x-2=64-32x+4x^2 \\
& \Leftrightarrow 3x^2-31x+66=0 \\
& \Leftrightarrow x=3 \in D \text{ ou } x=\tfrac{22}{3} \notin D
\end{aligned}$$

Donc : $S=\{3\}$.

## Question 2

(1) $\dfrac{4x^2-9}{2+3x-2x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{2+3x-2x^2} \leq 0$

C.E. : $2+3x-2x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

Tableau du signe :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(2x-3)(2x+3)$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $2+3x-2x^2$ | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $\dfrac{4x^2-9}{2+3x-2x^2}$ | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | ‖ | − |

Donc : $S = ]-\infty,-\frac{3}{2}] \cup ]-\frac{1}{2},\frac{3}{2}] \cup ]2,+\infty[$

(2) C.E : $x \neq 0$ et $x \neq 2$. Donc : $D=\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$

Alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}>2 \\
& \Leftrightarrow \frac{2-x+x}{x(2-x)}>\frac{2x(2-x)}{x(2-x)} \\
& \Leftrightarrow \frac{2-2x(2-x)}{x(2-x)}>0 \\
& \Leftrightarrow \frac{2-4x+2x^2}{x(2-x)}>0 \,/ :2 \\
& \Leftrightarrow \frac{1-2x+x^2}{x(2-x)}>0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x(2-x)}>0
\end{aligned}$$

Tableau du signe :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x(2-x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\dfrac{(x-1)^2}{x(2-x)}$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ |

Donc : $S=[0,2]\setminus\{1\}$.

## Question 3

$p(x)=2x^2+\left(1+2\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}$

(1) Le nombre de racines est donné par le calcul de $\Delta$ :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(1+2\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2}\\ &=1+4\sqrt{2}+8-8\sqrt{2}\\ &=9-4\sqrt{2}\simeq 3,34>0\end{aligned}$$

Il y a donc 2 racines distinctes.

Le signe des racines est donné par le calcul du produit et de la somme.

- $P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$, donc les 2 racines ont même signe et non nulles.
- $S=-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}<0$, donc les 2 racines sont strictement négatives.

En conclusion, $p(x)$ admet deux racines strictement négatives.

(2) On a :

$$\begin{aligned}&a^2+b^2\\ &=(a+b)^2-2ab\\ &=S^2-2P\\ &=\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1+4\sqrt{2}+8-4\sqrt{2}}{4}\\ &=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

## Question 4

(1) $q(x)=x^2-mx+m-1$ est toujours du $2^{e}$ degré.

- $\Delta=m^2-4(m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2\geq 0$.
- $P=m-1$
- $S=m$

| $m$ | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ |
| $P$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $S$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Nombre et signe des racines | 2<br>+,− | 2<br>+,− | 2<br>+,− | 2<br>+,0 | 2<br>+,+ | 1<br>+ | 2<br>+,+ |

(2) a) $q(x)$ admet deux racines ***opposées*** ssi $S = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (alors $\Delta > 0$ ).

a) $q(x)$ admet des racines ***inverses*** l'une de l'autre ssi $P = 1 \Leftrightarrow m = 2$. Mais alors il y a une seule racine (voir tableau). Donc il ne peut pas y a voir 2 racines distinctes inverses l'une de l'autre.

b) $q(x)$ admet une racine égale à 3

$\Leftrightarrow q(3) = 0$

$\Leftrightarrow 3^2 - 3m + m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9 - 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = 4$

G. Lorang