Nom : ......Corrigé...................... Prénom : ....

3C2	Devoir de mathématiques	7.12.09

Question 1

8 (=4+4) points

(1) Définir : ***fonction***.

voir cahier

(2) Définir : fonction ***strictement décroissante*** sur un intervalle I (avec figure).

voir cahier

Question 2

16 (=4x4) points

Déterminer le ***domaine*** des fonctions suivantes, puis étudier leur ***parité*** :

(1) $f : x \mapsto x^3 - \dfrac{4}{x}$

C.E: $x \neq 0$ $\quad$ $\text{dom} f = \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{4}{-x}$$
$$= -x^3 + \frac{4}{x}$$
$$= -f(x)$$

Donc f est impaire

(2) $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2+2}$

C.E: $x^2+2 \neq 0$, toujours vrai $\quad$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2+2}$$
$$= \frac{|x|}{x^2+2}$$
$$= f(x)$$

Donc f est paire

(3) $f : x \mapsto 3\sqrt{1-x} + 2$

C.E : $1 - x \geq 0 \iff x \leq 1$

$\text{dom} f =]-\infty ; 1]$

Le domaine n'est pas symétrique p.r. à l'origine, donc f n'est ni paire, ni impaire.

(4) $f : x \mapsto x + 5$

f n'est ni paire, ni impaire.
En effet :

$f(1) = 6$
$f(-1) = 4$
] résultats ni égaux, ni opposés

Question 3

18 (=3x6) points

Déterminer le ***domaine*** des fonctions suivantes :

(1) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{-2x+7}}$

C.E : $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 & (1) \\ -2x + 7 > 0 & (2) \end{cases}$

(1)

x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x \in]-\infty ; -3] \cup [3, +\infty[$

(2) $-2x + 7 > 0 \iff x < \frac{7}{2}$

Donc : $\text{dom} f =]-\infty ; -3] \cup [3 ; \frac{7}{2}[$

(2) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{5x+12}}{2x+39-5x^2}$

C.E : $\begin{cases} 5x + 12 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{12}{5} & (1) \\ 2x + 39 - 5x^2 \neq 0 & (2) \end{cases}$

(2) : $\Delta = 4 + 4 \cdot 39 \cdot 5 = 784$ $\quad \sqrt{\Delta} = 28$

$x_1 = \dfrac{-2-28}{-10} = 3$

$x_2 = \dfrac{-2+28}{-10} = -\dfrac{13}{5}$

Donc : $\text{dom } f = \left[-\dfrac{12}{5} ; +\infty\right[\setminus \{3\}$

(3) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-3}{8x^2+2x}}$

C.E : $\dfrac{x-3}{8x^2+2x} \geqslant 0$

Valeurs critiques :

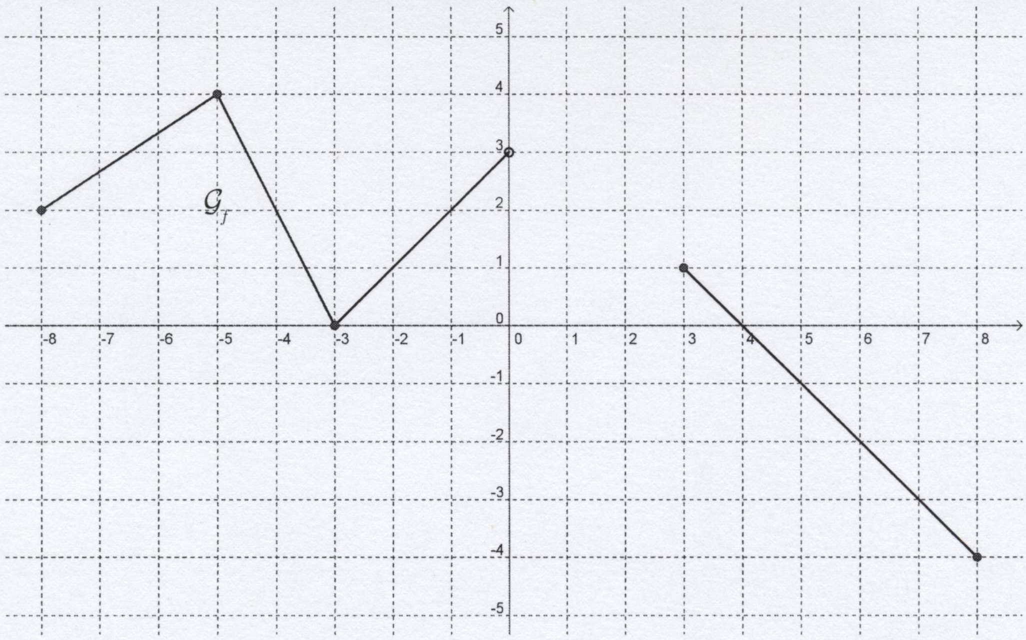
- $x - 3 = 0 \iff x = 3$
- $8x^2 + 2x = 0 \iff 2x(4x+1) = 0$
  $\iff x = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$8x^2+2x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-3}{8x^2+3x}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\text{dom } f = \left]-\dfrac{1}{4} ; 0\right[\cup [3, +\infty[$

Question 4 — 10 points

Voici le graphe complet d'une fonction f :



(1) Quel est le domaine de f ?

dom $f = [-8, 0[\cup [3, 8]$

(2) Déterminer les images de -3, de 3 et de 7 par f :

$f(-3) = 0$; $f(3) = 1$; $f(7) = -3$

(3) Déterminer les antécédents de 2 par f :

$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -8$ ou $x = -4$ ou $x = -1$

(4) Déterminer tous les réels qui ont au moins un antécédent par f :

Ce sont tous les réels de $[-4, 4]$

(5) Quelles sont les racines de f ?

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 4$

(6) Déterminer tous les réels dont l'image est > 2 :

$f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in]-8 ; -4[\cup]-1, 0[$

(7) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq -1$:

$f(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \in [5, 8]$

(8) Quel est le sens de variation de f sur $[4,7]$? sur $[-6,-3]$?

f est str. $\searrow$ sur $[4, 7]$.

f est str. $\nearrow$ sur $[-6, -5]$ et str. $\searrow$ sur $[-5, -3]$

Question 5 **8 points**

Etudier le ***sens de variation*** de la fonction $f : x \mapsto 7 - 4x^2$ ***sans la représenter graphiquement***, puis dresser son ***tableau de variation*** :

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$)

$$
\begin{aligned}
& x < x' \\
\Rightarrow\ & x^2 < x'^2 \quad |\cdot(-4) \\
\Rightarrow\ & -4x^2 > -4x'^2 \quad |+7 \\
\Rightarrow\ & 7-4x^2 > 7-4x'^2 \\
\Rightarrow\ & f(x) > f(x')
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\begin{aligned}
& x < x' \\
\Rightarrow\ & x^2 > x'^2 \\
\Rightarrow\ & -4x^2 < -4x'^2 \\
\Rightarrow\ & f(x) < f(x')
\end{aligned}
$$

Donc f est strictement $\searrow$ sur $\mathbb{R}_+$
et str. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_-$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	7 M	$\searrow$	

G. Lorang