Nom : Corrigé Prénom :

3C2 Devoir de mathématiques II,2 1.03.2010

Question 1 — 16 (=6+5+1+1+1+2) points

(1) Démontrer géométriquement que $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Voir cahier

(2) Enoncer et démontrer la formule donnant $\cos^2 \alpha$ en fonction de $\tan^2 \alpha$.

Voir cahier

(3) Donner la mesure principale d'un angle de $-\frac{41\pi}{6}$: $-\frac{5\pi}{6}$

(4) Donner la mesure en degrés d'un angle de 5 rad : 286,48°

(5) Donner la mesure en degrés d'un angle de $\frac{7\pi}{12}$ rad : 105°

(6) Quel est le signe de $\sin\frac{13\pi}{5}$? Justifier la réponse ! : $\sin\frac{13\pi}{5} > 0$

car $\frac{13\pi}{5} \equiv \frac{3\pi}{5}$ est un angle du 2e quadrant.

Question 2 — 18 (=6+12) points

(1) Soit α un angle du 2e quadrant tel que $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Déterminer $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ et $\cot\alpha$ sans utiliser la calculatrice. A l'aide de la calculatrice, déterminer ***toutes*** les valeurs possibles de α à 10^{-4} près.

a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \frac{25}{169} = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{144}{169}$

$\Leftrightarrow \cancel{\cos\alpha = \frac{12}{13}}$ ou $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

à exclure car $\alpha \in 2^e$ q.

Donc $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{13}{12}\right) = -\frac{5}{12}$

c) $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{12}{5}$

d) $\alpha \equiv \text{Arccos}\left(-\frac{12}{13}\right) + k\cdot 2\pi$

$\cong 2,7468 + k\cdot 2\pi$

(2) a) Soit β un angle du 3e quadrant tel que $\cot\beta = \frac{3}{4}$. Déterminer $\tan\beta$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$ sans utiliser la calculatrice. A l'aide de la calculatrice, déterminer ***une*** valeur possible de β à 10^{-4} près dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi]$.

a) $\tan\beta = \frac{4}{3}$

b) $\cos^2\beta = \frac{1}{1+\tan^2\beta}$

$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{1+\frac{16}{9}}$

$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{25}$

$\Leftrightarrow \cancel{\cos\beta = \frac{3}{5}}$ ou $\cos\beta = -\frac{3}{5}$

à exclure car $\beta \in 3^e$ q.

c) $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$\Leftrightarrow \sin\beta = \cos\beta\cdot\tan\beta$

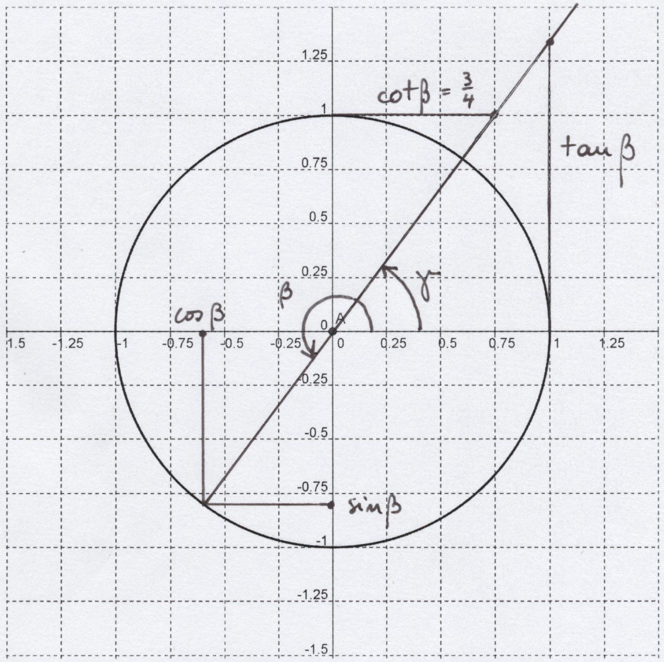
$\Leftrightarrow \sin\beta = -\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{4}{5}$

Donc $\beta \equiv \mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) + \pi + k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \beta \cong 4{,}0689 + k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Valeur dans $[2\pi, 4\pi]$: $4{,}0689 + 2\pi \simeq \underline{10{,}3521}$

b) Construire avec précision l'angle β et ses nombres trigonométriques associés sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



c) Il existe un réel $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ayant la même cotangente que β. Quel est ce réel ?

$\gamma = \mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right) \cong 0{,}9273$

Question 3 — 7 points

Simplifier l'expression suivante en supposant que les dénominateurs sont non nuls. (On ne demande pas les conditions d'existence !)

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\tan\left(\pi-\alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\tan(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$= \frac{-\cos\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= 1$$

Question 4 — 9 points

Exprimer en fonction d'un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Expliciter les étapes de votre raisonnement :

(1) $\cos\left(\frac{18\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

(2) $\sin\left(-\frac{6\pi}{11}\right) = -\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{11}\right)$

$= -\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{11}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)$

(3) $\tan\left(\frac{45\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$

$= -\tan\frac{3\pi}{8} = -\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cot\frac{\pi}{8}$

Question 5 — 10 points

Déterminer les conditions d'existence, puis démontrer l'identité trigonométrique :

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

C.E : $1+\sin\alpha \neq 0 \iff \sin\alpha \neq -1$

$\iff \alpha \neq -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$1-\sin\alpha \neq 0 \iff \sin\alpha \neq 1$

$\iff \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

$\cos\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$

Donc $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k\in\mathbb{Z} \right\}$

$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

$= \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha) + \cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}$

$= \frac{\cos\alpha - \cancel{\cos\alpha\sin\alpha} + \cos\alpha + \cancel{\cos\alpha\sin\alpha}}{1-\sin^2\alpha}$

$= \frac{2\cancel{\cos\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$

G. Lorang