Nom : ....Corrigé.................... Prénom : ....

3C2 — Devoir de mathématiques III,3 — 5.07.2010

Question 1

12 (=3+3+6) points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne l'ensemble

$$\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0\,.$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

Soit $\Omega(a,b)$. On sait que :

$$\begin{cases} -2a = 8 \\ -2b = -6 \\ a^2+b^2-r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ r^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ r = 5 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-4,3)$ et de rayon 5.

(2) Quels sont les points A et B d'ordonnée –1 de $\mathcal{C}$?

On remplace y par -1 dans l'éq. de $\mathcal{C}$:

$$x^2 + 1 + 8x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = 64 - 28 = 36 \;;\quad x_1 = \frac{-8-6}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-8+6}{2} = -1$$

Donc $A(-1,-1)$ et $B(-7,-1)$.

(3) Montrer que $D(0,6) \in \mathcal{C}$ et déterminer une équation cartésienne de la tangente t à $\mathcal{C}$ au point D.

$D \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 0^2 + 6^2 + 8\cdot 0 - 6\cdot 6 = 0$ VRAI !

Donc $D \in \mathcal{C}$.

$\vec{\Omega D}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pente de $(\Omega D) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ pente de $t = -\frac{4}{3}$

Donc $t \equiv y = -\frac{4}{3}x + p$

$D \in t \Leftrightarrow 6 = -\frac{4}{3}\cdot 0 + p \Leftrightarrow p = 6$

Donc $t \equiv y = -\frac{4}{3}x + 6$

Question 2

6 points

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on donne les points $E\left(13,7\right)$ et $F\left(10,-2\right)$ qui appartiennent à un cercle $\mathcal{C}$. Déterminer l'équation cartésienne d'une droite d qui contient le centre du cercle $\mathcal{C}$.

d est la médiatrice de $[EF]$, car le centre de $\mathcal{C}$ est équidistant de E et de F.

$\vec{EF}\begin{pmatrix}-3\\-9\end{pmatrix} \Rightarrow$ pente $(EF) = 3$

$\Rightarrow$ pente de $d = -\frac{1}{3}$

$d \equiv y = -\frac{1}{3}x + p$. On mil $[EF] = I\left(\frac{23}{2}; \frac{5}{2}\right)$

$I \in d \Leftrightarrow \frac{5}{2} = -\frac{23}{6} + p \Leftrightarrow p = \frac{19}{3}$

Donc $d \equiv y = -\frac{1}{3}x + \frac{19}{3}$

Question 3

12 (=6+6) points

Calculer les valeurs exactes et approchées des sommes

$$S = 1 + 4 + 7 + 11 + \dots + 100 \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{20}\left(-\tfrac{3}{2}\right)^k$$

Les termes dans S sont ceux d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 1}$ de 1^{er} terme 1 et de raison 3.

$u_n = 1 + 3\cdot(n-1)$, $n \geq 1$

$= 3n - 2$

Or, $u_n = 100$

$\Leftrightarrow 3n - 2 = 100$

$\Leftrightarrow n = 34$

Donc il y a 34 termes dans la somme.

$S = 34 \cdot \frac{1+100}{2}$

$= 17 \cdot 101 = 1717$

$T = 1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots + \frac{3^{20}}{2^{20}}$

T est la somme de 21 termes d'une suite géométrique $(v_n)_{n\geq 1}$ de 1^{er} terme $v_1 = 1$ et de raison $-3/2$

$T = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^{21}}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)}$

$= \frac{2}{5}\cdot\left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{21}\right)$

$\simeq 1995,554$

Question 4 15 (=2+6+5+2) points

On considère les suite $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$, $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ et $\left(c_n\right)_{n\geq 1}$, dont les premiers termes sont :

- $a_0 = \frac{7}{2}$, $a_1 = 5$, $a_2 = \frac{13}{2}$, $a_3 = 8$, $a_4 = \frac{19}{2}$, ...
- $b_1 = 100$, $b_2 = 80$, $b_3 = 64$, $b_4 = 51{,}2$, ...
- $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{2}{9}$, $c_3 = \frac{3}{16}$, $c_4 = \frac{4}{25}$, ...

(1) Préciser a_5, b_5 et c_5.

$a_5 = 11$; $b_5 = \frac{1024}{25} = 40{,}96$; $c_5 = \frac{5}{36}$

(2) Ces suites sont-elles arithmétiques ou géométriques ? Dans l'affirmative, préciser la raison et le premier terme, sinon justifier pourquoi.

- $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de 1er terme $7/2$ et de raison $3/2$
- $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de 1er terme 100 et de raison $4/5$.
- $(c_n)_{n\geq 1}$ n'est ni arithmétique (car $c_2 - c_1 = \frac{2}{9} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36}$ et $c_3 - c_2 = \frac{3}{16} - \frac{2}{9} = -\frac{5}{144}$) ni géométrique (car $\frac{c_2}{c_1} = \frac{8}{9}$ et $\frac{c_3}{c_2} = \frac{27}{32}$)

(3) Donner des formules explicites pour a_n, b_n et c_n.

- $a_n = a_0 + n \cdot \frac{3}{2} \Leftrightarrow a_n = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot n$, $\underline{n \geq 0}$
- $b_n = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, $\underline{n \geq 1}$
- $c_n = \frac{n}{(n+1)^2}$, $\underline{n \geq 1}$

(4) Définir les suites $\left(a_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$ par récurrence.

$\begin{cases} a_0 = 7/2 \\ a_{n+1} = a_n + 3/2 , \ n \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 100 \\ b_{n+1} = \frac{4}{5} \cdot b_n , \ n \geq 1 \end{cases}$

Question 5 — 5 points

Déterminer le réel x tel que les trois réels $x+20$, x et $x+60$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Les termes donnés sont les termes consécutifs d'une suite géométrique

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+20} = \frac{x+60}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x+20)(x+60)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 80x + 1200$$

$$\Leftrightarrow 80x = -1200$$

$$\Leftrightarrow x = -15$$

Les 3 termes sont alors 5, -15 et 45

(raison -3 !)

Question 6 — 10 points

La somme de n termes d'une suite arithmétique de raison 7 est 325. Calculer les n termes de cette suite arithmétique sachant que le 5^{e} terme vaut 29.

Notons $u_1, u_2, \dots, u_n$ les n termes.

$u_5 = 29 \Rightarrow u_1 = u_5 - 4\cdot 7 = 29 - 28 = 1$

Donc : $u_n = 1 + (n-1)\cdot 7 = 7n - 6$, $n \geq 1$

$$S_n = 325 \Leftrightarrow n \cdot \frac{1 + 7n - 6}{2} = 325$$

$$\Leftrightarrow n\cdot(7n-5) = 325 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 7n^2 - 5n - 650 = 0$$

$$\Delta = 25 + 18200 = 18'225$$

$$n_1 = \frac{5-135}{14} = -\frac{65}{7} \text{ (à exclure)}$$

$$n_2 = \frac{5+135}{14} = \underline{\underline{10}}$$

Donc $n = 10$ et les 10 termes cherchés sont :

$1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64$.

G. Lorang