Nom : .... Prénom : ....

3CB1 Devoir de mathématiques I,3 20.01.2022

Durée : 110' ***Calculatrice autorisée uniquement dans la question 6***

Question 1 6 (=1+3+2) points

Dans un triangle quelconque *ABC* on introduit les notations usuelles :

$$a = BC\ ,\ b = AC\ ,\ c = AB\ ,\ \alpha = \hat{A}\ ,\ \beta = \hat{B}\ \text{et}\ \gamma = \hat{C}\ .$$

On suppose que l'angle α est ***obtus***.

(1) Faire une figure soignée dans ce cas.

(2) Démontrer la relation d'Al-Kashi en utilisant l'angle α.

(3) Démontrer la formule qui donne l'aire du triangle en utilisant l'angle α.

Question 2 7 (=2+5) points

(1) Enoncer et illustrer par une figure l'associativité de l'addition des vecteurs.

(2) a) Donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs.

b) Démontrer que si $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ (avec figure du cours).

Question 3 13 (=3+3+3+1,5+2,5) points

Dans un triangle *ABC*, on utilise les notations de la question 1 et on donne $a = 2$, $b = \sqrt{3}+1$ et $\gamma = 60°$.

(1) Déterminer la valeur exacte de *c*.

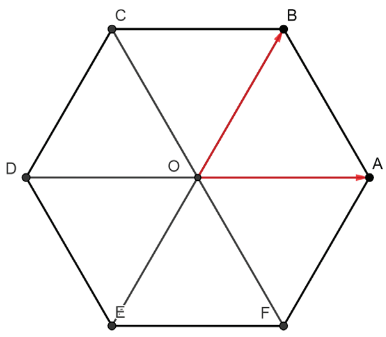
(2) a) Déterminer la valeur exacte de $\sin\alpha$. b) En déduire les valeurs possibles pour α.

(3) Démontrer que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire la bonne valeur de l'angle α.

(4) Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle *ABC*.

(5) Déterminer β et en déduire les valeurs exactes de $\sin 75°$ et $\cos 15°$.

Question 4 7 (=2+5) points



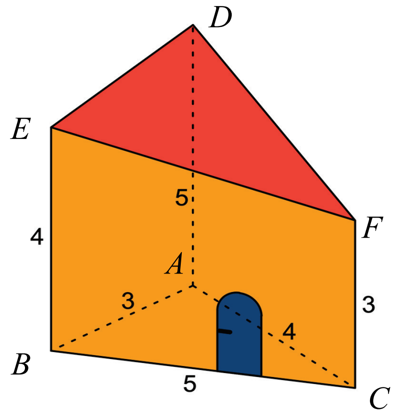
La figure ci-contre représente un hexagone régulier *ABCDEF*, de centre *O*. Les deux questions sont indépendantes.

(1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$ et en déduire leurs coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

(2) Soit *G*, *H* et *I* les centres de gravité des triangles *OAB*, *OCD* et *OEF* respectivement. Montrer que le centre de gravité du triangle *GHI* est le point *O*. ***Indication*** : calculer $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OI}$.

Tournez s.v.p.

Question 5 13 (=2+5+6) points



La maison ci-contre (en 3D !) est formée d'une base triangulaire ABC, trois murs verticaux en forme de trapèzes $ABED$, $ACFD$ et $BCFE$ et du toit triangulaire DEF.

(1) Montrer que la base ABC est un triangle rectangle et en déduire son aire.

(2) Déterminer les longueurs des côtés du toit. Il suffit de détailler les calculs et les raisonnements pour EF. Pour les deux autres longueurs, on pourra se restreindre au calcul principal. ***Indication*** : Il faut ajouter certains points sur la figure …

(3) En déduire que l'aire du toit est égal à 7.

Bonus (2 p.) : Calculer le volume de la maison.

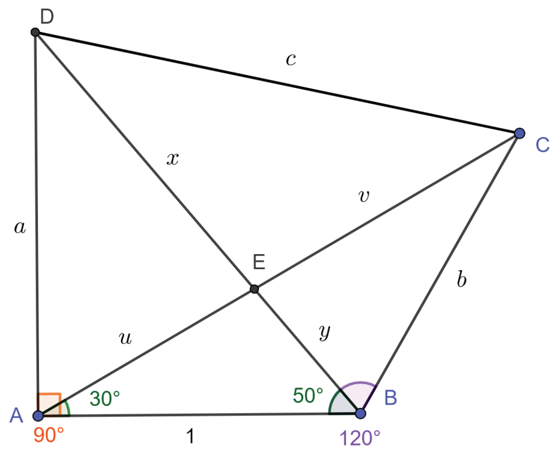
Veuillez remettre les réponses aux questions 1 à 5 avant de prendre la calculatrice !

Question 6 (à traiter sur une feuille à part) 14 (=1+10+3) points

Dans cet exercice on recommande de stocker les résultats intermédiaires importants dans les mémoires de la calculatrice. Le quadrilatère $ABCD$ de la figure ci-dessous vérifie :

$$AB = 1,\ \widehat{ABC} = 120°\ ,\ \widehat{ABD} = 50°,\ \widehat{BAD} = 90°,\ \widehat{BAC} = 30°.$$

(1) Ajouter ***sans justification*** 8 angles sur la figure dont la mesure en ° est un ***nombre entier***. (Il est inutile de copier la figure.)



(2) Calculer ensuite les longueurs inconnues $a = AD$, $b = BC$, $c = CD$, $u = AE$, $v = EC$, $x = DE$ et $y = EB$ en fonction des angles de la figure (valeurs exactes et valeurs approchées à 10^{-3} près).

Remarque : Utilisez les lettres minuscules. Précisez toujours le triangle dans lequel vous appliquez les formules mais il n'est pas besoin d'indiquer le nom de la formule ou du théorème.

(3) Calculer les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC}$ en ° ′ ″ .