Devoir I,2 - corrigé

Dienstag, 12. November 2019 19:11

Question 1

$(1) \iff \underbrace{\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+3)(x-5)}}_{Q(x)} \geq 0$

V.C. : $\pm\sqrt{2}\,;\,-3\,;\,5$ C.E : $x \neq -3$ et $x \neq 5$

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		5		$+\infty$
x^2-2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-2x-15$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

$$S_1 = \left]-\infty\,;-3\right[\cup \left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right] \cup \left]5\,;+\infty\right[$$

$(2) \iff \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)} < -\dfrac{1}{x-1}$

$\iff \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{1}{x-1} < 0$

$\iff \dfrac{(x-1)(x+1) - (x+2)(x+5) + (x+1)(x+5)}{(x-1)(x+1)(x+5)} < 0$

$\iff \dfrac{x^2-1-(x^2+7x+10)+(x^2+6x+5)}{(x-1)(x+1)(x+5)} < 0$

$\iff \dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-7x-10+x^2+6x+5}{(x-1)(x+1)(x+5)} < 0$

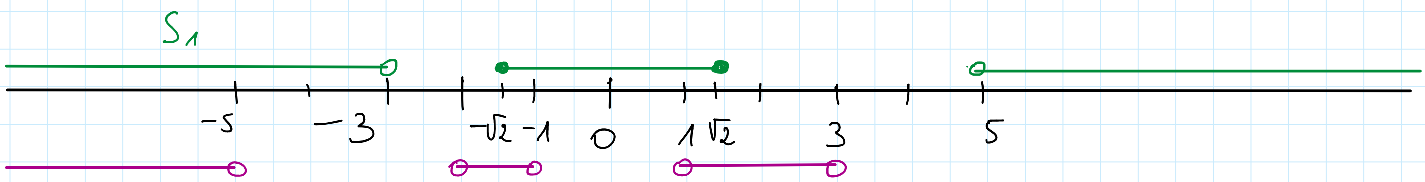
$\iff \dfrac{x^2-x-6}{(x-1)(x+1)(x+5)} < 0$

$\iff \underbrace{\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x+5)}}_{F(x)} < 0$

V.C. $-2, 3, -1, 1, -5$ C.E : $x \neq 1$ et $x \neq -1$ et $x \neq -5$

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$F(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$S_2 = \left]-\infty\,;-5\right[\cup \left]-2\,;-1\right[\cup \left]1\,;3\right[$$



$$S = S_1 \cap S_2 = \left]-\infty\,;-5\right[\cup \left[-\sqrt{2}\,;-1\right[\cup \left]1\,;\sqrt{2}\right]$$

Question 2

$$3x^8 - x^4 - 2 = 0 \quad (E)$$

Posons : $x^4 = y$
Alors (E) devient :

$$3y^2 - y - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(3y+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -2/3$$

Revenons à x :

- $x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{1}$
  $\Leftrightarrow x = \pm 1$
- $x^4 = -2/3$ est impossible.

Donc $S = \{\pm 1\}$

Question 3

$$x^2 - 2mx + 6 - m = 0 \quad (E)$$

(1) -2 est solution de (E)
$\Leftrightarrow 4 - 2\cdot m(-2) + 6 - m = 0$
$\Leftrightarrow 4 + 4m + 6 - m = 0$
$\Leftrightarrow 3m + 10 = 0$
$\Leftrightarrow m = -10/3$

Bonus : Dans ce cas (E)

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{20}{3}x + 6 + \frac{10}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{20}{3}x + \frac{28}{3} = 0$$

Le produit des racines est $\frac{28}{3}$
(Il y a au moins la racine -2, donc $\Delta \geq 0$)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{28}{3}$$
$$\Leftrightarrow -2 \cdot x_2 = \frac{28}{3} \quad \Big| : (-2)$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{14}{3}$$

(2) (E) admet 2 racines distinctes de signes opposés

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 & (1) \\ P < 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6-m)$
$= 4m^2 - 24 + 4m$
$= 4(m^2 + m - 6)$
$= 4(m-2)(m+3)$

m	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in]-\infty ; -3[\cup]2 ; +\infty[$

(2) $P = \frac{6-m}{1} < 0$

$\Leftrightarrow 6 - m < 0$

$\Leftrightarrow 6 < m$

$\Leftrightarrow m > 6$

$\Leftrightarrow m \in]6 ; +\infty[$

Donc : (E) admet 2 racines distinctes de signes opposées $\Leftrightarrow m \in]6 ; +\infty[$

Question (4)

C_1 = capital après un 1 an :

C_1 = capital après un 1 an :

$$C_1 = 15'000 + 15'0\cancel{00} \cdot \frac{t}{1\cancel{00}}$$

$$= 150\,(100+t)$$

C_2 = capital après 2 ans :

$$= C_1 + C_1 \cdot \frac{t+2}{100}$$

$$= 150\,(100+t) + 150 \cdot (100+t) \cdot \frac{t+2}{100}$$

$$= (100+t)\left(150 + 15\cancel{0} \cdot \frac{t+2}{10\cancel{0}}\right)$$

$$= (100+t)(150 + 1{,}5t + 3)$$

$$= (100+t)(153 + 1{,}5 \cdot t)$$

Equation : $C_2 = 17'172$

$$\Leftrightarrow (100+t)(153 + 1{,}5t) = 17'172$$

$$\Leftrightarrow 15'300 + 150t + 153t + 1{,}5t^2 = 17'172$$

$$\Leftrightarrow 1{,}5t^2 + 303t - 1872 = 0$$

$$\Delta = 303^2 + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 1872 = 103041$$

$$t_1 = \frac{-303 - 321}{3} < 0 \text{ impossible}$$

$$t_2 = \frac{-303 + 321}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Donc $t = 6\,\%$