Corrigé du devoir II,3 A

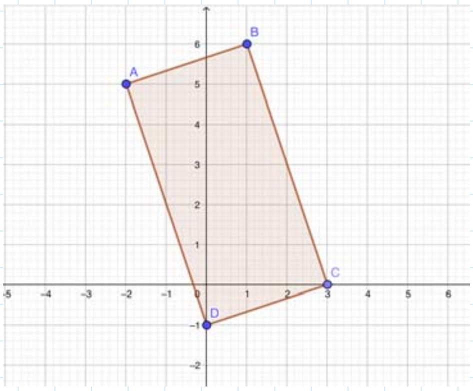
Freitag, 15. Mai 2020 08:35

Question 1

Voir cours

Question 2

(1)



2) ABCD est un rectangle.
En effet :

- $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} = \vec{DC}$,
donc ABCD est déjà un parallélogramme
- $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$,
donc $\vec{AB} \perp \vec{BC}$, donc ABCD est un parallélogramme avec un angle droit.
C'est donc un rectangle !

(3) $(DC) \equiv y = \frac{1}{3}x - 1$

$(AB) \equiv y = \frac{1}{3}x + t$ (car $(AB) \parallel (DC)$)

$A \in (AB) \Leftrightarrow 5 = -\frac{2}{3} + t$
$\Leftrightarrow t = \frac{17}{3}$

Donc $(AB) \equiv y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$

$(BC) \perp (AB)$, donc (BC) et (AD) ont comme pente -3.

$(AD) \equiv y = -3x - 1$

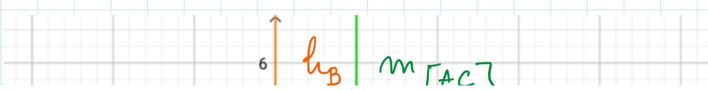
$(BC) \equiv y = -3x + k$

$(3,0) \in (BC) \Leftrightarrow 0 = -9 + k \Leftrightarrow k = 9$

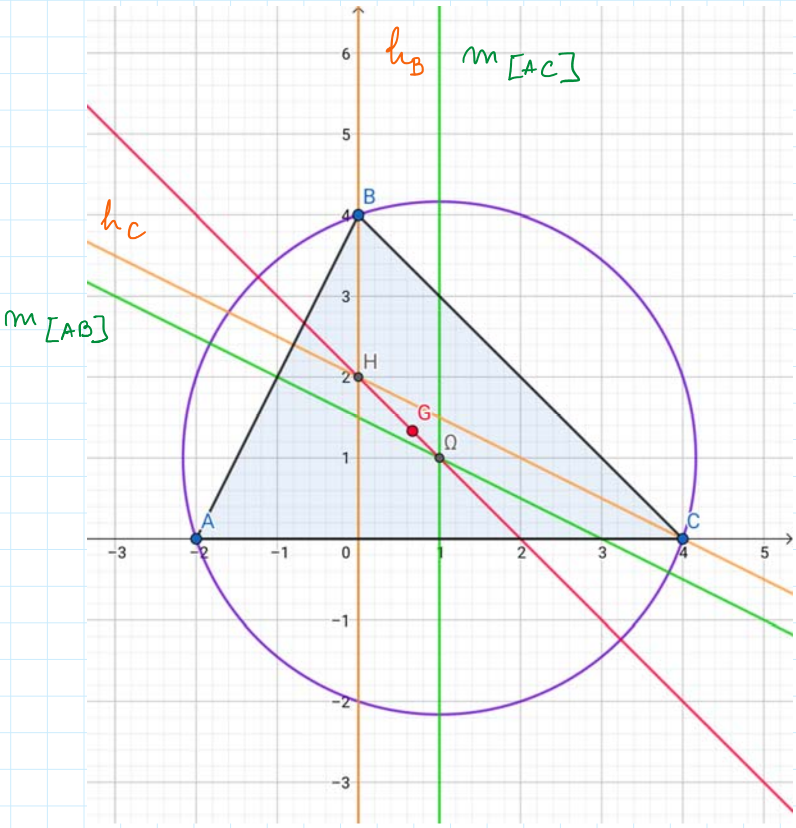
Donc $(BC) \equiv y = -3x + 9$

Question 3

1)



1)



droite d'Euler, passe par G, H et Ω !

2) $G\left(\frac{-2+0+4}{3} ; \frac{0+4+0}{3}\right)$

$= G\left(\frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

3) • $I = \text{mil } [AC] = (1,0)$

$m_{[AC]}$ passe par I et $m_{[AC]} \perp [AC]$.

Donc $m_{[AC]} \equiv x = 1$

• $M(x,y) \in m_{[AB]}$

$\Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-0)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 4x + 8y - 12 = 0 \quad |:4$

$\Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

Donc : $m_{[AB]} \equiv x + 2y - 3 = 0$

• $\Omega \begin{cases} x = 1 & (1) \\ x + 2y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \to (2)$: $1 - 3 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Donc $\Omega(1,1)$

4) • $h_B \equiv x = 0$

• $h_C \parallel m_{[AB]}$

Donc $h_C \equiv x + 2y + c = 0$

$C(4,0) \in h_C \Leftrightarrow 4 + 0 + c = 0$
$\Leftrightarrow c = -4$

Donc $h_C \equiv x + 2y - 4 = 0$

• $H \begin{cases} x = 0 & (1') \\ x + 2y - 4 = 0 & (2') \end{cases}$

$(1') \to (2')$: $y = 2$

Donc $H(0,2)$

5) $\mathcal{C} \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$

avec $r = \Omega A = \sqrt{(-2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \mathcal{C} \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$ (éq. canonique)

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 10$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ (éq. développée)

6) $D \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (2-1)^2 + (-2-1)^2 = 10$

$\Leftrightarrow 1 + 9 = 10$ VRAI

Donc $D \in \mathcal{C}$

7) a) $M(x,y) \in (G\Omega)$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega G}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & \frac{2}{3}-1 \\ y-1 & \frac{4}{3}-1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 0 \quad | \cdot 3$

$\Leftrightarrow x - 1 + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x + y = 2$

$\Leftrightarrow \quad x + y = 2$

Donc : $(G\Omega) \equiv x + y = 2$

b) $\underset{(0,2)}{H} \in (G\Omega) \Leftrightarrow 0 + 2 = 2$ VRAI.

Donc $H \in (G\Omega)$

La droite qui passe par G, H et Ω est appelée droite d'Euler du ΔABC.

Question 4

1) $\mathcal{E}$ est l'éq. d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = -3 & (1) \\ -2b = 1 & (2) \\ a^2 + b^2 - r^2 = -\frac{15}{4} & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \qquad (2) \Leftrightarrow b = -1$

(1) et $(2) \rightarrow (3)$: $\frac{9}{4} + 1 - r^2 = -\frac{15}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{13}{4} + \frac{15}{4} = r^2$

$\Leftrightarrow 7 = r^2$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{7}$

Donc $\mathcal{E} = \mathcal{C}\left(\Omega\left(\frac{3}{2}; -1\right); \sqrt{7}\right)$

2) $\mathcal{F}$ = cercle de centre $(3,-6)$ et de rayon 0

Donc $\mathcal{F}$ est un cercle réduit à son centre

$\mathcal{F} = \{(3,-6)\}$