Corrigé du devoir II,4

Donnerstag, 2. Juli 2020 07:56

Question 1

Voir cours

Question 2

1) a) C.E. : $3-x^2 \geq 0$ (1)

V.C. : $\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_1 = [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

$3-2x-x^2 \geq 0$

$\Delta = 4-4\cdot 3(-1) = 16$

$x_1 = \frac{2-4}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{2+4}{-2} = -3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3-2x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_2 = [-3;1]$

$\text{dom} f = D_1 \cap D_2 = [-\sqrt{3};1]$

b) C.E. : (1) $3-2x-x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -3$ et $x \neq 1$

(2) $\dfrac{3-x^2}{3-2x-x^2} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$3-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$3-2x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3-x^2}{3-2x-x^2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\text{dom}\, g =]-\infty;-3[\cup [-\sqrt{3};1[\cup [\sqrt{3};+\infty[$

c) C.E. : $3-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$

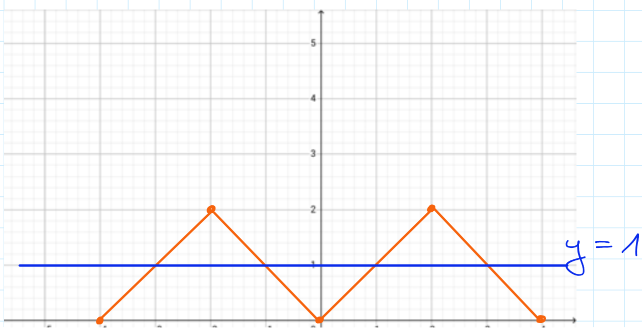
$3-2x-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ et $x \neq -3$

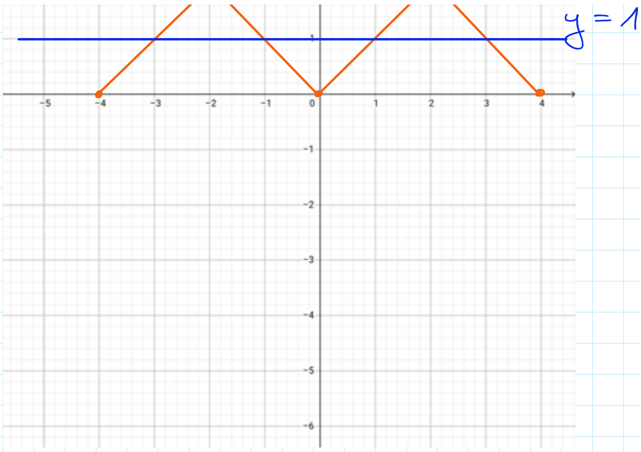
$\text{dom}\, h = [-\sqrt{3};\sqrt{3}] \setminus \{1\}$

2) Les 3 domaines ne sont pas symétriques p.r. à 0.
Donc les 3 fonctions ne sont ni paires ni impaires.

Question 3

1)





2) f admet des minima égaux à 0 en −4, 0 et 4.
f admet des maxima égaux à 2 en −2 et 2.

3) $f(x) = 1 \iff x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 3$

4) $\operatorname{dom} f = [-4, 4]$ et $\operatorname{im} f = [0 ; 2]$

Question 4

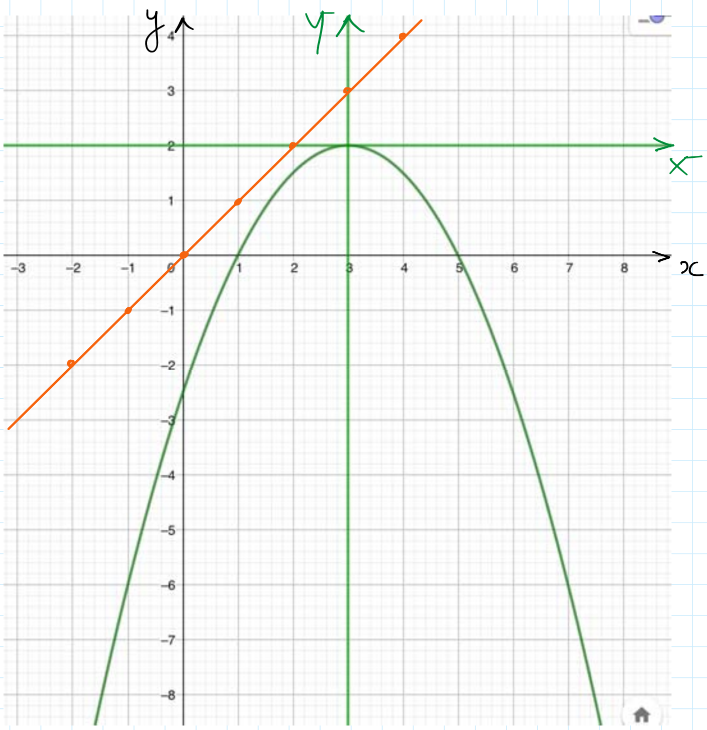
1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

Sommet : $S(u, v) = S(3, 2)$

$u = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{-1} = 3$

$v = f(3) = -\frac{9}{2} + 9 - \frac{5}{2} = 2$

G_f est une parabole de sommet S et d'équation $Y = -\frac{1}{2}X^2$ dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$.



2)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2 (M)	$\searrow$	

3) <u>Graphiquement :</u> On trace la droite représentative de la fonction $g : x \longmapsto x$

$f(x) \leqslant x \iff x \in \mathbb{R}$.

<u>Algébriquement :</u> $f(x) \leqslant x$

$\iff -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} \leqslant x$

$\iff -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2} \leqslant 0 \quad | \cdot (-2)$

$\iff x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-4x+5		$+$	

Donc $S = \mathbb{R}$.

Question 5

$f(x) = |1+2x| - \left|\frac{x}{2}+3\right| + 2x$

(1) V.C. : $1+2x = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}+3 = 0 \iff x = -6$

x	$-\infty$		-6		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 1+2x \rvert$		$-1-2x$		$-1-2x$	0	$1+2x$	
$\left\lvert \frac{x}{2}+3 \right\rvert$		$-\frac{x}{2}-3$	0	$\frac{x}{2}+3$		$\frac{x}{2}+3$	
$f(x)$		$\frac{x}{2}+2$	-1	$-\frac{x}{2}-4$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{7x}{2}-2$	

- Si $x \in \left]-\infty ; -6\right]$: $f(x) = (-1-2x) - \left(-\frac{x}{2} - 3\right) + 2x$

$= -1 \cancel{-2x} + \frac{x}{2} + 3 + \cancel{2x}$

$= \frac{x}{2} + 2$

- Si $x \in \left[-6 ; -\frac{1}{2}\right]$: $f(x) = (-1-2x) - \left(\frac{x}{2}+3\right) + 2x$

$= -1 \cancel{-2x} - \frac{x}{2} - 3 \cancel{+2x}$

$= -\frac{x}{2} - 4$

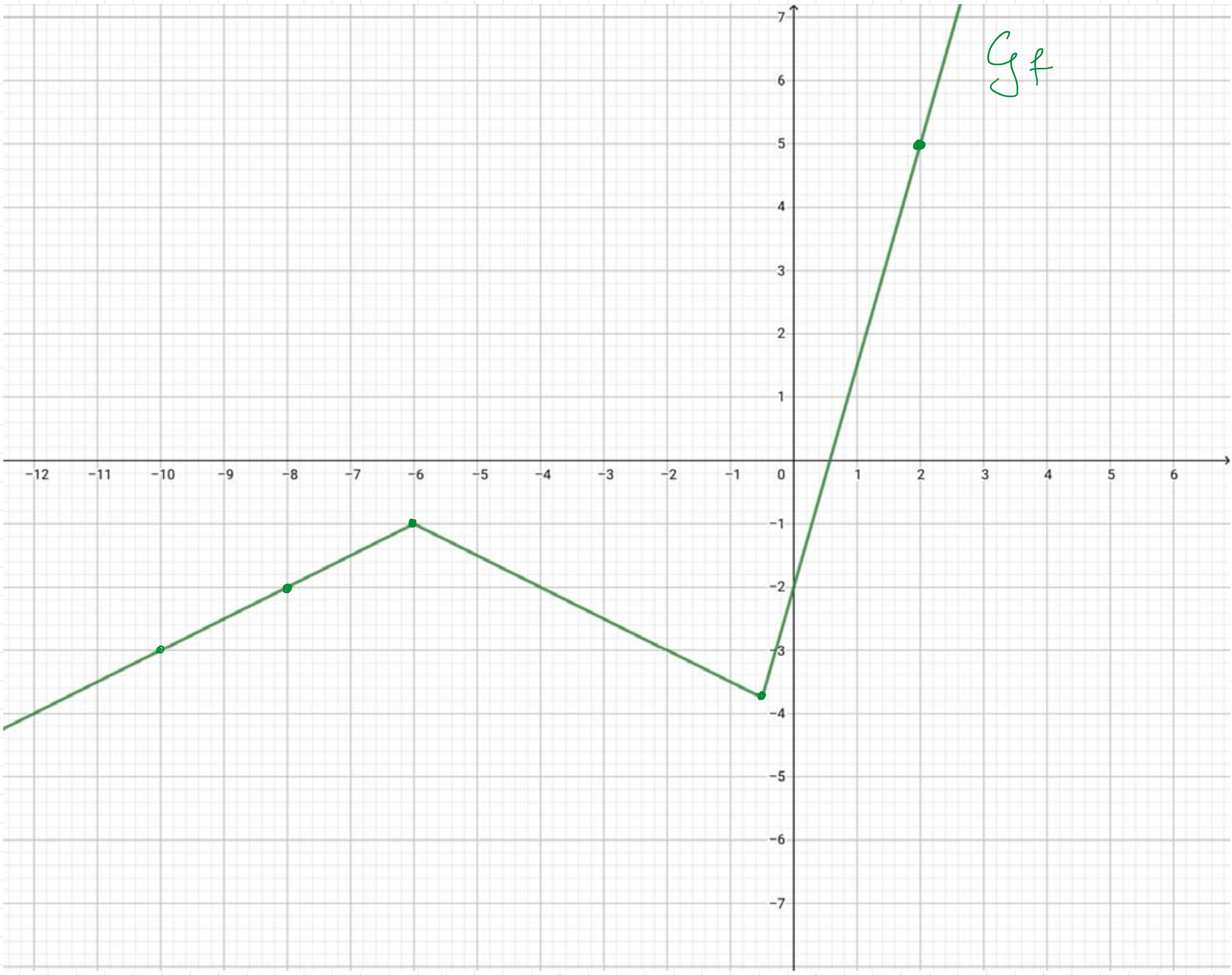
- Si $x \in \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$: $f(x) = 1 + 2x - \left(\frac{x}{2}+3\right) + 2x$

$= 1 + 2x - \frac{x}{2} - 3 + 2x$

$= \frac{7x}{2} - 2$

2

(2)



(3) Graphiquement : $f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2$ $\quad S = \{2\}$

Algébriquement :

1er cas : $\boxed{x \leq -6}$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 2 = 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 6$, impossible

$S_1 = \emptyset$

2e cas : $\boxed{-6 \leq x \leq -1/2}$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} - 4 = 5 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = 9 \Leftrightarrow x = -18$, impossible

$S_2 = \emptyset$

3e cas : $\boxed{x \geq -1/2}$

$f(x) = 5 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} - 2 = 5 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} = 7 \Leftrightarrow x = 2$

$S_3 = \{2\}$

$S = \{2\}$