3CMB1/B2 Corrigé du devoir de mathématiques III,3 30.06.04

Exercice 1

(1) $$\begin{aligned} S &= 8+15+22+29+...+421 \\ &= \sum_{n=0}^{59}(8+7n) \quad (60 \text{ termes}) \quad . \\ &= 60\cdot\frac{8+421}{2} = 12870 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} T &= -\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{4}{15}+\frac{8}{45}-...+\frac{512}{32805} \\ &= \sum_{n=0}^{9}\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad (10 \text{ termes}) \\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{10}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} \\ &= -\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right) \\ &= -\frac{2321}{6561} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} R &= \sum_{n=8}^{15}(25-6n) \quad (8 \text{ termes}) \\ &= -23-29-35-...-65 \\ &= 8\cdot\frac{-23-65}{2} = -352 \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} U &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n} \\ &= 3+\frac{9}{4}+\frac{27}{16}+\frac{81}{64}+... \\ &= 3\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3\cdot 4 = 12 \end{aligned}$$

Exercice 2

On écrit par exemple les deux équations en fonction de q et de u_0

$$\begin{cases} u_0+u_1+u_2 = 5495 \Leftrightarrow u_0+qu_0+q^2u_0 = 5495 \Leftrightarrow u_0\left(1+q+q^2\right) = 5495 & (1) \\ u_2-u_1 = 4620 \Leftrightarrow q^2u_0-qu_0 = 4620 \Leftrightarrow u_0\left(q^2-q\right) = 4620 & (2) \end{cases}$$

Pour éliminer u_0, on divise membre par membre les deux équations :

$$\begin{aligned} &\frac{\cancel{u_0}\left(q^2-q\right)}{\cancel{u_0}\left(1+q+q^2\right)} = \frac{4620}{5495} \\ &\Leftrightarrow 5495\left(q^2-q\right) = 4620\left(1+q+q^2\right) \end{aligned}$$

Cette équation est du 2^e degré. La TI nous donne deux racines :

$$q_1 = 12 \text{ et } q_2 = -\frac{11}{25}.$$

- En remplaçant $q=12$ dans l'équation (2), on obtient : $u_0 = 35$. La suite cherchée est dans ce cas : $\left(35\cdot 12^n\right)_{n\geq 0}$.
- En remplaçant $q=-\frac{11}{25}$ dans l'équation (2), on obtient : $u_0 = \frac{21875}{3}$. La suite cherchée est dans ce cas :

$$\left(\frac{21875}{3}\cdot\left(-\frac{11}{25}\right)^n\right)_{n\geq 0}.$$

Exercice 3

(1) $C_1 = C_0\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{p}{100}\right)$ et

$C_2 = C_1\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{p}{100}\right) = C_0\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^2$

(2) En général :

$$C_n = C_{n-1}\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right), n \geq 1$$

et donc $(C_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1-\dfrac{p}{100}\right)$.

Par conséquent : $C_n = C_0\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^n\left(1-\dfrac{p}{100}\right)^n,\ n \geq 0$

(3) Si $p = t$, la richesse de cette personne décroît, car alors la raison de la suite (C_n) est < 1 :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{t^2}{10000} < 1.$$

(4) Le capital ne diminue pas ssi la raison de la suite est ≥ 1. En d'autres termes :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) \geq 1 &\Leftrightarrow 1-\frac{p}{100} \geq \frac{1}{1+\frac{t}{100}} \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+\frac{t}{100}} \geq \frac{p}{100} \\
&\Leftrightarrow p \leq 100 - \frac{10'000}{100+t} \\
&\Leftrightarrow p \leq \frac{100t}{100+t}
\end{aligned}$$

C'est le pourcentage maximum que la personne peut prélever !

Exercice 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow &\left|\frac{6n+2-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow &\left|\frac{6n+2-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| \leq \varepsilon \\
\Leftrightarrow &\left|\frac{5}{2(2n-1)}\right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2(2n-1)} \leq \varepsilon / \text{ inverser}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2n-1)}{5} \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 2n-1 \geq \frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow 2n \geq \frac{5}{2\varepsilon}+1 \Leftrightarrow n \geq \underbrace{\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}}_{N(\varepsilon)}$$

Donc, en choisissant $N = N(\varepsilon) = \frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$, on a prouvé que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) > 0) / n \geq N \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{2n-1}-\frac{3}{2}\right| \leq \varepsilon$$

En d'autres termes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

G. Lorang