Exercice 1

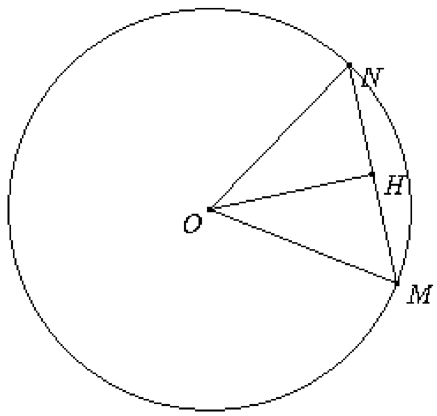
(1) Voir cours.

(2) $-\frac{2009\pi}{8} \equiv -251\pi - \frac{\pi}{8} \equiv -\pi - \frac{\pi}{8} \equiv \pi - \frac{\pi}{8} \equiv \frac{7\pi}{8}$ rad, la dernière mesure étant la mesure principale.

(3) a) $\frac{27\pi}{15}$ rad $= 324°$ b) $25°16'48'' = 25{,}28° = 0{,}44122$ rad.

(4) La longueur de l'arc est : long $\widehat{MN} = 64°15' \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 5 \cong 5{,}61$ m.

La longueur de la corde $[MN]$ se calcule en remarquant que le triangle OMN est isocèle de sommet O (le centre du cercle). Le triangle OHM, H étant le milieu de la corde $[MN]$ est donc rectangle en H. Donc :



$$\begin{aligned}\overline{MN} &= 2 \cdot \overline{MH}\\ &= 2 \cdot \overline{OM} \cdot \sin(32°7{,}5')\\ &= 5{,}318 \text{ m}\end{aligned}$$

La corde $[MN]$ est évidemment plus courte que l'arc $\widehat{MN}$.

(5) Distance parcourue par A en 3'12'' $= 0{,}05\overline{3}$ h : $45 \cdot 0{,}05\overline{3} = 2{,}4$ km.

Distance parcourue par B en 3'12'' : $30 \cdot 0{,}05\overline{3} = 1{,}6$ km.

D'où le périmètre du cercle : $2{,}4 + 1{,}6 = 4{,}0$ km.

Rayon du cercle :

$$\begin{aligned}&2\pi r = 4 \Leftrightarrow r = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} = 0{,}636619772 \text{ km}\\ &\Leftrightarrow r = 636{,}620 \text{ m}\end{aligned}$$

Exercice 2

(1) $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a) $\sin^2\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = 1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \sin^2\left(-\tfrac{5\pi}{12}\right) + \left(\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1\\ &\Leftrightarrow \sin^2\left(-\tfrac{5\pi}{12}\right) + \tfrac{8-2\sqrt{12}}{16} = 1\\ &\Leftrightarrow \sin^2\left(-\tfrac{5\pi}{12}\right) = \tfrac{8+2\sqrt{12}}{16} = \left(\tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2\\ &\Leftrightarrow \sin\left(-\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \text{ car } -\tfrac{5\pi}{12} \text{ appartient au } 4^{\text{e}} \text{ quadrant}\end{aligned}$$

$b)\quad \tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$= -\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = -\frac{8+2\sqrt{12}}{4}$$

$$= -\frac{8+4\sqrt{3}}{4} = -2-\sqrt{3}$$

$c)\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$d)\ \cos\left(\frac{91\pi}{12}\right) = \cos\left(7\pi+\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(-\pi+\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$e)\ \sin\left(-\frac{2003\pi}{12}\right) = \sin\left(-166\pi-\frac{11\pi}{12}\right)$

$$= -\sin\tfrac{11\pi}{12} = -\sin\left(\pi-\tfrac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)$$

$$= -\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) = -\tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 3

Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned}
\sin^6 a + \cos^6 a &= \left(\sin^2 a\right)^3 + \left(\cos^2 a\right)^3 \\
&= \underbrace{\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right)}_{1}\left(\sin^4 a - \sin^2 a\cdot\cos^2 a + \cos^4 a\right) \\
&= \sin^4 a - \sin^2 a\cdot\cos^2 a + \cos^4 a
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\underline{\sin^6 a} - 2\sin^4 a + \underline{\cos^6 a} + \sin^2 a - \cos^4 a \\
&= \underline{\sin^4 a - \sin^2 a\cdot\cos^2 a + \cos^4 a} - 2\sin^4 a + \sin^2 a - \cos^4 a \\
&= -\sin^4 a - \sin^2 a\cdot\cos^2 a + \sin^2 a \\
&= -\sin^4 a + \sin^2 a\underbrace{\left(1-\cos^2 a\right)}_{\sin^2 a} \\
&= -\sin^4 a + \sin^4 a \\
&= 0
\end{aligned}$$

.

G. Lorang