Exercice 1

$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$$

Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = (1-m)(1+m)$$

Ce déterminant s'annule lorsque $m = 1$ ou $m = -1$.

<u>1^{er} cas</u> : $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Alors le système admet une solution unique, que l'on détermine à l'aide des déterminants de Cramer :

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - m(m+1) = 2 - m - m^2$

  Δ_x est un trinôme du second degré, qu'il convient de factoriser, afin de simplifier éventuellement la solution x : le discriminant de ce trinôme est $1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$. Ses racines sont donc :

  $$m_1 = \frac{1-3}{-2} = 1 \text{ et } m_2 = \frac{1+3}{-2} = -2$$

  Donc : $\Delta_x = 2 - m - m^2 = -(m+2)(m-1) = (m+2)(1-m)$

  et :

  $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(m+2)(1-m)}{(1+m)(1-m)} = \frac{m+2}{m+1}$$

- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = m + 1 - 2m = 1 - m$, donc :

  $$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1-m}{(1+m)(1-m)} = \frac{1}{m+1}$$

Dans le 1er cas, on a donc :

$$S = \left\{ \left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{1}{m+1} \right) \right\}$$

<u>2e cas</u> : $m = 1$. Alors le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Il admet donc une infinité de solutions :

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 2 - x \right\}$$
$$= \left\{ (x, 2-x) \,/\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

3^{e} cas : $m=-1$. Alors le système devient :

$$\begin{cases} x-y=2 \\ -x+y=0 \mid \cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

Donc : $S=\varnothing$.

Exercice 2

(1) $x-\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x}$

Conditions d'existence : a) $\sqrt{x}$ existe $\Leftrightarrow x \geq 0$ et b) $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

En résumé, toute solution de l'équation est nécessairement ≥ 2 : $D=[2,+\infty[$.

$(\forall x \in D)$

$$\underbrace{x-2}_{+}=\underbrace{\sqrt{x}}_{+} \mid (\ )^2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2=x$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=x$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$

Cette équation du second degré admet deux solutions distinctes : $x_1=1$ et $x_2=4$.

La première solution doit être écartée, car elle est <2.

Donc : $S=\{4\}$.

(2) Soit $p(x)=6x^3+19x^2-52x+15$.

Cherchons une racine évidente de p. On sait qu'une racine entière de p, si elle existe, est nécessairement un diviseur de 15. Or :

$\operatorname{Div}(15)=\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

$p(1)=6+19-52+15 \neq 0$

$p(-1)=-6+19+52+15 \neq 0$

$p(3)=6 \cdot 27+19 \cdot 9-52 \cdot 3+15 \neq 0$

$p(-3)=-6 \cdot 27+19 \cdot 9+52 \cdot 3+15 \neq 0$

$p(5)=6 \cdot 125+19 \cdot 25-52 \cdot 5+15 \neq 0$

$p(-5)=-6 \cdot 125+19 \cdot 25+52 \cdot 5+15=0$

Donc : $p(x)$ est divisible par $x+5$:

	6	19	-52	15
-5		-30	55	-15
	6	-11	3	0

Ainsi :

$$p(x)=(x+5)\underbrace{\left(6x^2-11x+3\right)}_{q(x)}$$

Il reste à déterminer les racines de $q(x)$:

$\Delta = 121 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49$; $x_1 = \dfrac{11-7}{12} = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = \dfrac{11+7}{12} = \dfrac{3}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation : $S = \left\{-5, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

Exercice 3

On factorise d'abord le trinôme au dénominateur dans le second membre, en passant par son discriminant. On trouve :

$$x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

L'inéquation proposée est donc équivalente à :

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x-2} - \frac{2x-1}{x+5} \geq \frac{7x^2}{(x-2)(x+5)} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x(x+5)}{(x-2)(x+5)} - \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x+5)} - \frac{7x^2}{(x-2)(x+5)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2 + 5x - \left(2x^2 - 5x + 2\right) - 7x^2}{(x-2)(x+5)} \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-8x^2 + 10x - 2}{(x-2)(x+5)} \geq 0 \ | : (-2) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4x^2 - 5x + 1}{(x-2)(x+5)} \leq 0
\end{aligned}$$

Le trinôme au dénominateur admet les racines 1 et $\frac{1}{4}$. On peut alors faire un tableau du signe de l'expression dans le membre de gauche :

x	$-\infty$	-5		$\frac{1}{4}$		1		2	$+\infty$
$4x^2 - 5x + 1$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$(x-2)(x+5)$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$\dfrac{4x^2 - 5x + 1}{(x-2)(x+5)}$	+	||	-	0	+	0	-	||	+

Finalement :

$$S =]-5, \tfrac{1}{4}] \cup [1, 2[$$

G. Lorang