3CMB1/B2 Corrigé du devoir de mathématiques II,1 21.01.04

Exercice 1

(1) Remarquons que l'équation proposée est toujours du second degré. Le nombre et le signe de ses racines sont déterminés par le discriminant Δ, ainsi que le produit P et la somme S des racines, lorsqu'elles existent :

$\Delta = [2(m-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(3m^2 - 4m + 1\right) = 8m - 8m^2 = 8m(1-m)$ (TI),

$P = 3m^2 - 4m + 1 = (m-1)(3m-1)$ (TI),

$S = 2(m-1)$.

D'où le tableau résumé suivant :

m	Δ	P	S	Conclusion
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	pas de racine
0	0	$+$	$-$	1 racine double, < 0
	$+$	$+$	$-$	2 racines distinctes et < 0
$\frac{1}{3}$	$+$	0	$-$	2 racines distinctes, l'une étant 0, l'autre < 0
	$+$	$-$	$-$	2 racines distinctes de signes opposés, la négative étant la plus grande en valeur absolue
1	0	0	0	1 racine double, à savoir 0
$+\infty$	$-$	$+$	$+$	pas de racine

(2) a) *(E)* admet 1 comme racine

$\Leftrightarrow 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (m-1) + 3m^2 - 4m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2m + 2 + 3m^2 - 4m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 6m + 4 = 0$

Cette équation n'a pas de solution (TI), donc un tel m n'existe pas !

b) *(E)* admet 2 racines distinctes et inverses ssi $\Delta > 0$ et $P = 1$. Or, d'après notre tableau ci-dessus $\Delta > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} P = 1 &\Leftrightarrow 3m^2 - 4m + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow 3m^2 - 4m = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Ces deux valeurs sont à exclure, car elles ne vérifient pas la condition $0 < m < 1$. Les racines de *(E)* ne peuvent donc pas être distinctes et inverses.

Exercice 2

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}>\sqrt{5-x} \quad \text{(I)}$$

$$\text{C.E. : } \begin{cases} 2x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2} & (1) \\ x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1 & (2) \\ 5-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 5 & (3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\leq x\leq 5 \quad \text{(A)}$$

Donc, si $-\frac{1}{2}\leq x\leq 5$ alors :

$$\begin{aligned} &\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}>\sqrt{5-x} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2x+1}}_{+}>\underbrace{\sqrt{x+1}+\sqrt{5-x}}_{+} \,/(\ )^2 \\ &\Leftrightarrow 2x+1>x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{5-x}+5-x \\ &\Leftrightarrow 2x+1>6+2\sqrt{x+1}\sqrt{5-x} \\ &\Leftrightarrow 2x-5>2\sqrt{x+1}\sqrt{5-x} \end{aligned}$$

Si $2x-5<0$ alors l'inéquation n'a pas de solution car alors le membre de gauche est <0 alors que le membre de droite est ≥ 0. Il apparaît donc une nouvelle C.E. :

$$2x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \tfrac{5}{2} \quad \text{(B)}$$

Compte-tenu des conditions (A) et de (B), on a donc, pour $\frac{5}{2}\leq x\leq 5$:

$$\begin{aligned} \text{(I)} &\Leftrightarrow (2x-5)^2>4(x+1)(5-x) \\ &\Leftrightarrow 8x^2-36x+5>0 \ \text{(TI)} \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $8x^2-36x+5$ sont :

$$x_1=\frac{\sqrt{71}+9}{4}\simeq 4{,}36 \text{ et } x_2=\frac{-(\sqrt{71}-9)}{4}\simeq 0{,}14 \ \text{(TI)}$$

Le signe de ce trinôme est positif, sauf entre les racines. Compte-tenu de ce que $\frac{5}{2}\leq x\leq 5$, on a donc :

$$S=]\frac{\sqrt{71}+9}{4},5]$$

Exercice 3

(1) Soit d la distance entre les villes, t_1 le temps pour l'aller et t_2 le temps pour le retour. On a donc :

$$\begin{cases} d=v_1t_1 \Leftrightarrow t_1=\dfrac{d}{v_1} & (1) \\ d=v_2t_2 \Leftrightarrow t_2=\dfrac{d}{v_2} & (2) \\ 2d=v(t_1+t_2) & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) correspond à l'aller, la (2) au retour. L'équation (3) traduit le fait que la ***vitesse moyenne*** v de l'avion pendant l'aller-retour est la vitesse ***constante*** à laquelle il devrait parcourir la distance $2d$ en le temps t_1+t_2.

(1) et (2) dans (3) :

$$\begin{aligned}
&2d = v\left(\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}\right) \\
&\Leftrightarrow 2d = vd\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \Big/ : d \\
&\Leftrightarrow 2 = v\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \Big/ : (2v) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)
\end{aligned}$$

(2) On a :

$$v_2 = v_1 + 100 \text{ et } v = 1000$$

Remplaçant ceci dans la formule trouvée à la question (1), il vient :

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1 + 100}\right)$$

La TI sait résoudre cette équation :

$$v_1 = 50\left(\sqrt{101} + 9\right) \simeq 952,49 \text{ ou } v_1 = -50\left(\sqrt{101} - 9\right) \simeq -52,49$$

La solution négative est évidemment à exclure.

Donc :

$$\begin{gathered}
v_1 = 50\left(\sqrt{101} + 9\right) \simeq 952,49 \text{ km/h} \\
v_2 = v_1 + 100 = 50\left(\sqrt{101} + 11\right) \simeq 1052,49
\end{gathered}$$

G. Lorang