Exercice 2

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{C}_1 \equiv x^2+y^2+6x-4y-12=0\,,$$
$$\mathcal{C}_2 \equiv x^2+y^2-3x+8y+12=0\,.$$

(1) Pour $\mathcal{C}_1$: $a^2+b^2-4c=36+16+48=100>0$;

Donc $\mathcal{C}_1$ est un cercle de centre $O_1(-3,2)$ et de rayon $r_1=\frac{\sqrt{100}}{2}=\frac{10}{2}=5$.

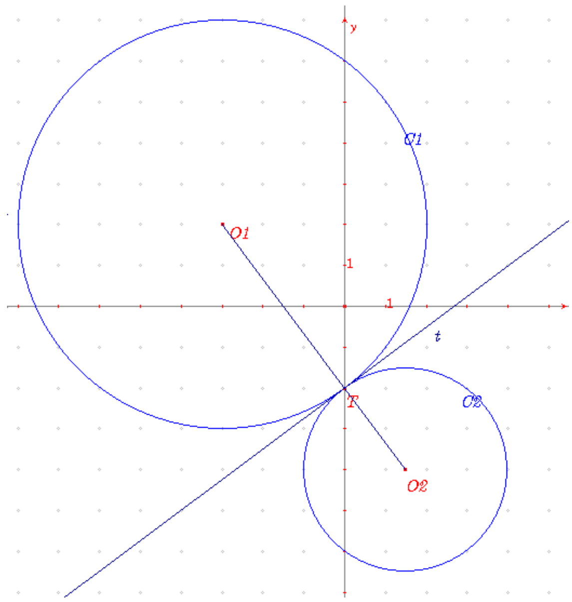
Pour $\mathcal{C}_2$: $a^2+b^2-4c=9+64-48=25>0$;

Donc $\mathcal{C}_2$ est un cercle de centre $O_2\left(\frac{3}{2},-4\right)$ et de rayon $r_2=\frac{\sqrt{25}}{2}=\frac{5}{2}$.

(2) D'une part : $\overline{O_1O_2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+3\right)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{144}{4}}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$

D'autre part : $r_1+r_2=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

Donc : $\overline{O_1O_2}=r_1+r_2$, ce qui prouve que les deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents extérieurement.



(3) Il est clair que $\overrightarrow{O_1T}=\frac{2}{3}\overrightarrow{O_1O_2}$ car $r_1=2r_2$.

Or : $\overrightarrow{O_1T}\begin{pmatrix}x_T+3\\ y_T-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{O_1O_2}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\ -6\end{pmatrix}$

Donc :

$$\begin{cases} x_T+3=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}=3 \Leftrightarrow x_T=0 \\ y_T-2=\frac{2}{3}\cdot(-6)=-4 \Leftrightarrow y_T=-2 \end{cases}$$

C.-à-d. : $T(0,-2)$.

(4) $\overrightarrow{O_1T}\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de t,

donc $t\equiv 3x-4y+c=0$.

$T(0,-2)\in t \Leftrightarrow 3\cdot0-4\cdot(-2)+c=0 \Leftrightarrow 8+c=0 \Leftrightarrow c=-8$,

donc : $t\equiv 3x-4y-8=0$.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, on donne la famille de courbes

$$d_m \equiv mx+2y-m-1=0\,,$$

où m est un paramètre réel.

(1) Chaque courbe d_m est une droite, car son équation est de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a,b)=(m,2)\neq(0,0)$.

(2) Un vecteur normal de d_m est $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$. d_m a donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, c.-à-d. ssi

$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}\,.$

(3) d_m est perpendiculaire à $a \equiv 2x + y + 7 = 0$

$\Leftrightarrow m \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1\,.$

(4) d_m est parallèle à $b \equiv y = -3x + 4$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ m & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6 - m = 0 \Leftrightarrow m = 6\,.$

(5) d_m a comme coefficient angulaire $-\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{m}{2} = \dfrac{-3}{5} \Leftrightarrow 5m = 6 \Leftrightarrow m = \dfrac{6}{5}\,.$

(6) $I\,(x_I, y_I\,)$ appartient à toutes les droites d_m

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \quad mx_I + 2y_I - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \quad m\,(x_I - 1) + (2y_I - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x_I - 1 = 0$ et $2y_I - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_I = 1$ et $y_I = \frac{1}{2}$

Donc : $I\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

G. Lorang