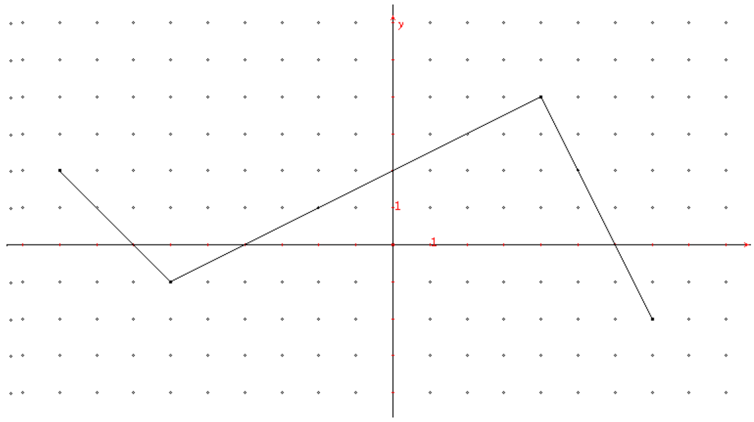
# 3CMB1/B2 Corrigé du devoir de mathématiques II,4 24.03.04

## Exercice 2




(1) $\text{dom}f = [-9{,}7]$ ; $\text{Im}\, f = [-2{,}4]$.

(2) $f(-2) = 1$, $f(0) = 2$ et $f(2) = 3$.

(3) Le seul antécédent de –2 est 7. Les antécédents de 3 sont 2 et 4,5.

(4) Les racines de $f$ sont –7, –4 et 6.

(5) Si $x \in [-9,-6]$ alors $f(x) = -x - 7$, si $x \in [-6,4]$ alors $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ et si $x \in [4,7]$ alors $f(x) = -2x + 12$. En résumé :

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x - 7 & \text{si } x \in [-9,-6] \\ \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \in [-6,4] \\ -2x + 12 & \text{si } x \in [4,7] \end{cases}$$

## Exercice 3

$f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x+4}$.

(1) $\text{dom}f = [1,+\infty[$ et $\text{dom}g = \mathbb{R} - \{-2\}$.

(2) On a :

$$(f \circ g)(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \text{ existe} \\ g(x) \in \text{dom}f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 & (1) \\ \dfrac{1}{2x+4} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

Résolvons l'inéquation (2) :

$$\frac{1}{2x+4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x-4}{2x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-2x}{2x+4} \geq 0$$

Il faut donc faire un tableau du signe de $\dfrac{-3-2x}{2x+4}$ :

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | $-\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3-2x$ | + | | + | 0 | + |
| $2x+4$ | - | 0 | + | | + |
| $\dfrac{-3-2x}{2x+4}$ | - | $\|\|$ | + | 0 | - |

En rassemblant les résultats de (1) et (2), on a $\text{dom}(f \circ g) = ]-2, -\frac{3}{2}]$.

D'autre part :

$$(g \circ f)(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \in \text{dom} g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 & (1) \\ \sqrt{x-1} \neq -2 & (2) \end{cases}$$

L'inégalité (2) est toujours vérifiée, car une racine carrée est toujours $\geq 0$, lorsqu'elle existe. Donc :

$$\text{dom}(g \circ f) = [1, +\infty[.$$

(3) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{2x+4} - 1} = \sqrt{\dfrac{-3-2x}{2x+4}}$, pour $x \in ]-2, -\frac{3}{2}]$ et

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}+4}$, pour $x \in [1, +\infty[$.

(4) $(f \circ f)(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ existe} \\ f(x) \in \text{dom} f \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 & (1) \\ \sqrt{x-1} \geq 1 & (2) \end{cases}$$

Pour résoudre (2), on peut élever au carré car les deux membres sont $\geq 0$ :

$$\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Donc : $\text{dom}(f \circ f) = [2, +\infty[$

G. Lorang