3CMB1/B2 Corrigé du devoir de mathématiques II,2 11.06.04

Exercice 1

(1) Soit d la distance parcourue à l'aller. La longueur du retour est donc de $2d$ et le trajet total a une longueur de $3d$. On a :

$$\text{Temps total} = \text{temps aller} + \text{temps retour}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3d}{v} = \frac{d}{v'} + \frac{2d}{v''} / : d$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{v} = \frac{1}{v'} + \frac{2}{v''}$$

(2) Comme $v = 60$ km/h la formule précédente devient :

$$\frac{3}{60} = \frac{1}{v'} + \frac{2}{v''} \Leftrightarrow \frac{1}{20} = \frac{1}{v'} + \frac{2}{v''}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{v''} = \frac{1}{20} - \frac{1}{v'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{v''} = \frac{v' - 20}{20v'} / \text{ inverser}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v''}{2} = \frac{20v'}{v' - 20}$$

$$\Leftrightarrow v'' = \frac{40v'}{v' - 20}$$

(3) On a :

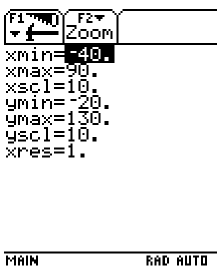
$$v'' = \frac{40v'}{v' - 20} = \frac{av' + b}{cv' + d}$$

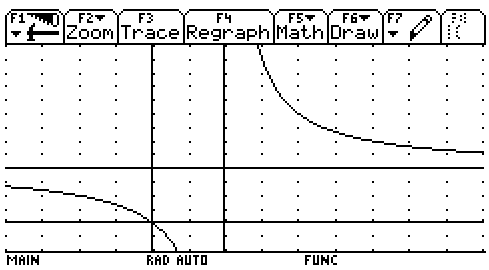
avec $a = 40, b = 0, c = 1, d = -20$.

D'après le cours, on sait que $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre de symétrie $S(20,40)$ et d'équation : $Y = k / X$ dans $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$, où :

$$k = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2} - \frac{\begin{vmatrix} 40 & 0 \\ 1 & -20 \end{vmatrix}}{1} = 800$$

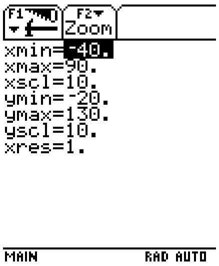
Remarque : $v'' = \dfrac{40v'}{v' - 20} = 40 + \dfrac{800}{v' - 20}$

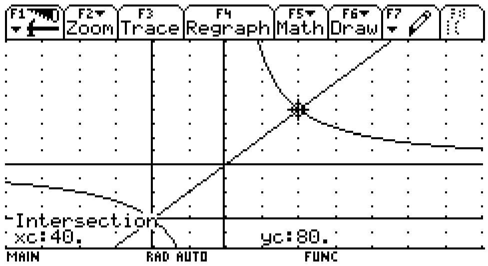




(4) Théoriquement, il faut et il suffit que $v' \in]20, +\infty]$ et $v'' \in]40, +\infty]$, sinon la vitesse moyenne de 60 km/h ne peut pas être atteinte.

(5) Graphiquement :





On voit que $v'' = 2v' \Leftrightarrow v' = 40$ km/h.

Algébriquement :

$$\begin{aligned}
v'' = 2v' &\Leftrightarrow \frac{40v'}{v'-20} = 2v' / : 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{20v'}{v'-20} - \frac{v'(v'-20)}{v'-20} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{20v' - v'^2 + 20v'}{v'-20} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{40v' - v'^2}{v'-20} = 0 \\
&\Leftrightarrow v'(40 - v') = 0 \\
&\Leftrightarrow v' = 0 \text{ ou } v' = 40
\end{aligned}$$

La solution 0 est bien sûr à écarter !

(6) On a :

- $v' = 80 \Leftrightarrow v'' = \dfrac{40 \cdot 80}{80 - 20} = \dfrac{3200}{60} = \dfrac{160}{3} \cong 53{,}33$ km/h
- $v'' = 120 \Leftrightarrow \dfrac{40 \cdot v'}{v'-20} = 120$

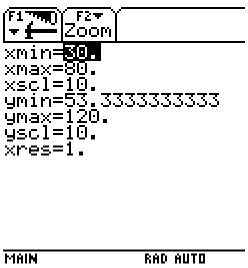
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 40v' = 120(v'-20) \\
&\Leftrightarrow 80v' = 120 \cdot 20 \\
&\Leftrightarrow v' = \tfrac{2400}{80} = 30
\end{aligned}$$

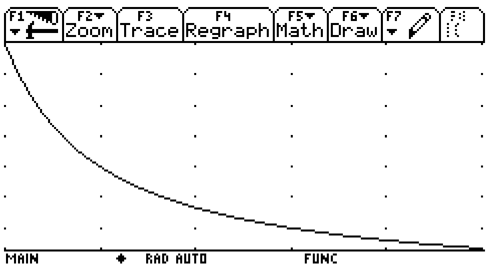
On doit donc avoir, en consultant le graphique :

$$30 \leq v' \leq 80 \text{ km/h et}$$

$$53{,}33 \leq v'' \leq 120 \text{ km/h.}$$

Voici donc la fenêtre qui nous intéresse :





Exercice 2

(1) $\dfrac{-4}{3-x} = x^2 - 4x + 1 \quad (\text{C.E. : } x \neq 3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4}{3-x} = x^2 - 4x + 1 / \cdot (3-x)$

$\Leftrightarrow -4 = -x^3 + 7x^2 - 13x + 3 \quad (\text{TI})$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^3 - 7x^2 + 13x - 7}_{p(x)} = 0$

Une racine évidente de $p(x)$ est 1 car : $p(1) = 1 - 7 + 13 - 7 = 0$.

Donc $p(x)$ est divisible par $x - 1$. Le schéma de Horner donne :

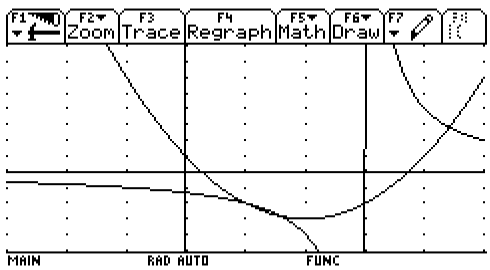
$p(x) = (x-1)\left(x^2 - 6x + 7\right)$.

Il reste à trouver les racines de $x^2 - 6x + 7$. On calcule le discriminant $\Delta = 36 - 28 = 8$ et on trouve $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.

Donc $S = \left\{1, 3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\right\}$.

(2) On représente graphiquement $f(x) = \dfrac{-4}{3-x} = \dfrac{4}{x-3}$ et $g(x) = x^2 - 4x + 1$.

- $\mathcal{C}_f$ est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(3,0)$ et d'équation $Y = 4/X$ dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
- $\mathcal{C}_g$ est une parabole de sommet $S(2,-3)$ et d'équation $Y = X^2$ dans $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



En utilisant les résultats de la question (1), on voit que l'ensemble de solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty, 1] \cup [3 - \sqrt{2}, 3[\cup [3 + \sqrt{2}, +\infty[$.

G. Lorang