Question 1

(1) $x(x-6)=41$

$\Leftrightarrow x^2-6x-41=0$

$\Delta = 36+4\cdot 41=200$

$\sqrt{\Delta}=10\sqrt{2}$

$x_1=\dfrac{6-10\sqrt{2}}{2}=3-5\sqrt{2}\approx -4{,}07$ $\qquad x_2=3+5\sqrt{2}\approx 10{,}07$

$$S=\left\{3\pm 5\sqrt{2}\right\}$$

(2) $8x^3+4913=0$

$\Leftrightarrow x^3=-\dfrac{4913}{8}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-\dfrac{4913}{8}}=-\dfrac{17}{2}$

$$S=\left\{-\frac{17}{2}\right\}$$

(3) $x^6=2007$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{2007}\approx 3{,}55$ ou $x=-\sqrt[6]{2007}\approx -3{,}55$

$$S=\left\{\pm\sqrt[6]{2007}\right\}$$

(4) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{5}{6-3x}=\dfrac{1-x}{x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{5}{3(2-x)}=\dfrac{1-x}{x+2}$ $\qquad \boxed{\text{C.E. : } x\neq 2 \text{ et } x\neq -2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{5}{3(x-2)}=\dfrac{1-x}{x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x}{3(x-2)(x+2)}-\dfrac{5(x+2)}{3(x-2)(x+2)}=\dfrac{3(x-2)(1-x)}{3(x-2)(x+2)} /\cdot 3(x-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow 3x-5x-10=3\left(x-x^2-2+2x\right)$

$\Leftrightarrow -2x-10=9x-3x^2-6$

$\Leftrightarrow 3x^2-11x-4=0$

$\Delta=121+4\cdot 3\cdot 4=169$

$x_1=\dfrac{11-13}{6}=-\dfrac{1}{3}\approx -0{,}33$ $\qquad x_2=\dfrac{11+13}{6}=4$

$$S=\left\{4,-\frac{1}{3}\right\}$$

Question 2

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(1) $3x^2 \geq 2x \Leftrightarrow 3x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(3x-2) \geq 0$

Valeurs critiques : 0 et $\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

(2) $\underbrace{6x^3 - 13x^2 + x + 2}_{p(x)} > 0$

On cherche une racine entière de $p(x)$ parmi les diviseurs de 2 :

$p(1) = 6 - 13 + 1 + 2 \neq 0$

$p(-1) = -6 - 13 - 1 + 2 \neq 0$

$p(2) = 48 - 52 + 2 + 2 = 0$

Donc $p(x)$ est divisible par $x - 2$. Le schéma de Horner donne :

$$p(x) = (x-2)\left(6x^2 - x - 1\right)$$

Il reste à trouver les racines de $6x^2 - x - 1$. On calcule le discriminant $\Delta = 25$ et on trouve $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{3}$.

On peut faire alors un tableau du signe de $p(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$6x^2 - x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc : $S = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

(3) $\dfrac{\left(x^2 + x\right)(3 - 2x)}{2x^2 - 11x + 15} \geq 0$

Valeurs critiques :

- $x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$.
- $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
- $2x^2 - 11x + 15 = 0$

  $\Delta = 121 - 120 = 1$

  $x_1 = \dfrac{11 - 1}{4} = \dfrac{5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{11 + 1}{4} = 3$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$3-2x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
$2x^2-11x+15$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Quotient	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$

Donc : $S=[-1,0]\cup[\frac{3}{2},\frac{5}{2}[\cup]3,+\infty[$.

Question 3

Soit x le nombres de mètres de tissu. Le prix d'un mètre de tisu est $1152/x$. On traduit l'énoncé par une équation :

$$\left(\frac{1152}{x}-32\right)\cdot(x+6)=1152$$
$$\Leftrightarrow 1152+\frac{6912}{x}-32x-192=1152$$
$$\Leftrightarrow \frac{6912}{x}-32x-192=0\,/\cdot(-x)$$
$$\Leftrightarrow 32x^2+192x-6912=0\,/:32$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-216=0$$

$\Delta=36+864=900$

$x_1=\dfrac{-6-30}{2}=-18$ impossible

$x_2=\dfrac{-6+30}{2}=12$

Anne a acheté 12 m de tissu au prix de 96 € par mètre.

G. Lorang