Question 1

(1) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{(-x)^3} - 4(-x) \\ &= -\frac{1}{x^3} + 4x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Donc : f est impaire.

(2) C.E. : $2+4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ et $2-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Donc : $\operatorname{dom} g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{2+4(-x)} + \sqrt{2-4(-x)} \\ &= \sqrt{2+4x} + \sqrt{2-4x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc : g est paire.

(3) C.E. : $-3x^2 + 8x - 5 > 0$

On détermine les racines du trinôme : 1 et $\frac{5}{3}$.

On fait un tableau du signe du trinôme et on trouve : $\operatorname{dom} h = \left]1, \frac{5}{3}\right[$

Ce domaine n'est pas symétrique par rapport à l'origine, donc h n'est ni paire, ni impaire.

(4) C.E. : $x^2 - 1 \geq 0$ et $x^4 - 16 \neq 0$

Pour la 1re condition on obtient : $S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

La 2e condition s'écrit : $x^4 \neq 16 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$.

Donc : $\operatorname{dom} k = (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[) \setminus \{-2, 2\}$.

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{\sqrt{(-x)^2 - 1}}{(-x)^4 - 16} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4 - 16} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

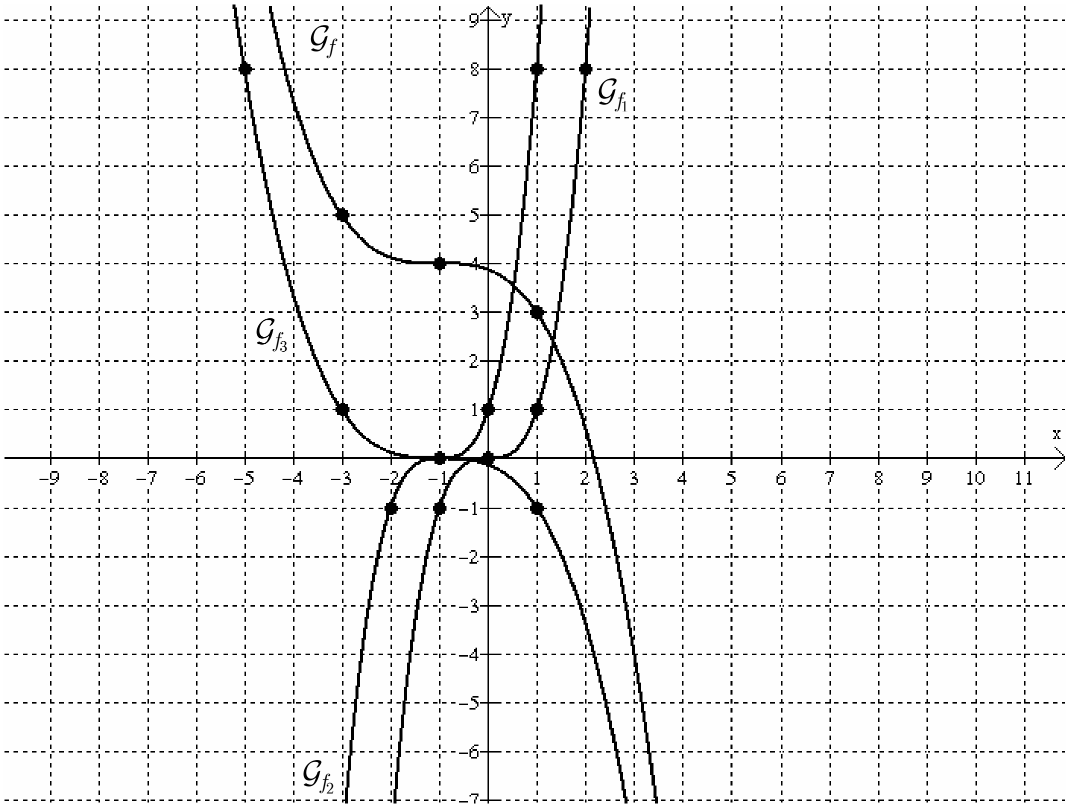
Donc : h est paire.

Question 2

(1) $f_1 : x \mapsto x^3$

$f_2 : x \mapsto (x+1)^3$	$f_2(x) = f_1(x+1)$
$f_3 : x \mapsto -\frac{1}{8}(x+1)^3$	$f_3(x) = -\frac{1}{8} f_2(x)$
$f : x \mapsto -\frac{1}{8}(x+1)^3 + 4$	$f(x) = f_3(x) + 4$

Donc, pour passer de $\mathcal{G}_{f_1}$ à $\mathcal{G}_f$, on retranche d'abord 1 aux abscisses, puis on multiplie les ordonnées par $-\frac{1}{8}$, puis on ajoute 4 aux ordonnées.



(2) $g_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$g_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad g_2(x) = g_1(x-2)$

$g_3 : x \mapsto \dfrac{3}{x-2}$ $\qquad g_3(x) = 3g_2(x)$

$g : x \mapsto \left|\dfrac{3}{x-2}\right|$ $\qquad g(x) = |g_3(x)|$

Donc, pour passer de $\mathcal{G}_{g_1}$ à $\mathcal{G}_g$, on additionne d'abord 2 aux abscisses, puis on multiplie les ordonnées par 3 et finalement on prend la valeur absolue des ordonneés (c.-à-d. on multiplie les ordonnées négatives par -1). (Figure : cf. page suivante.)

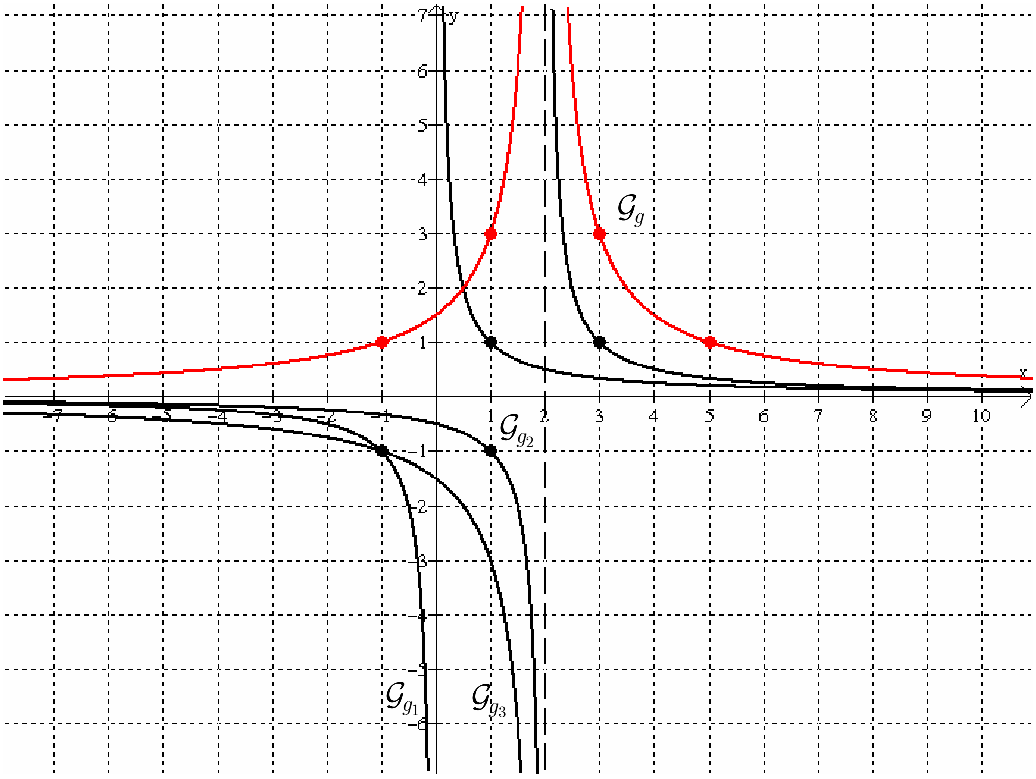
(3) $h_1 : x \mapsto \sqrt{x}$

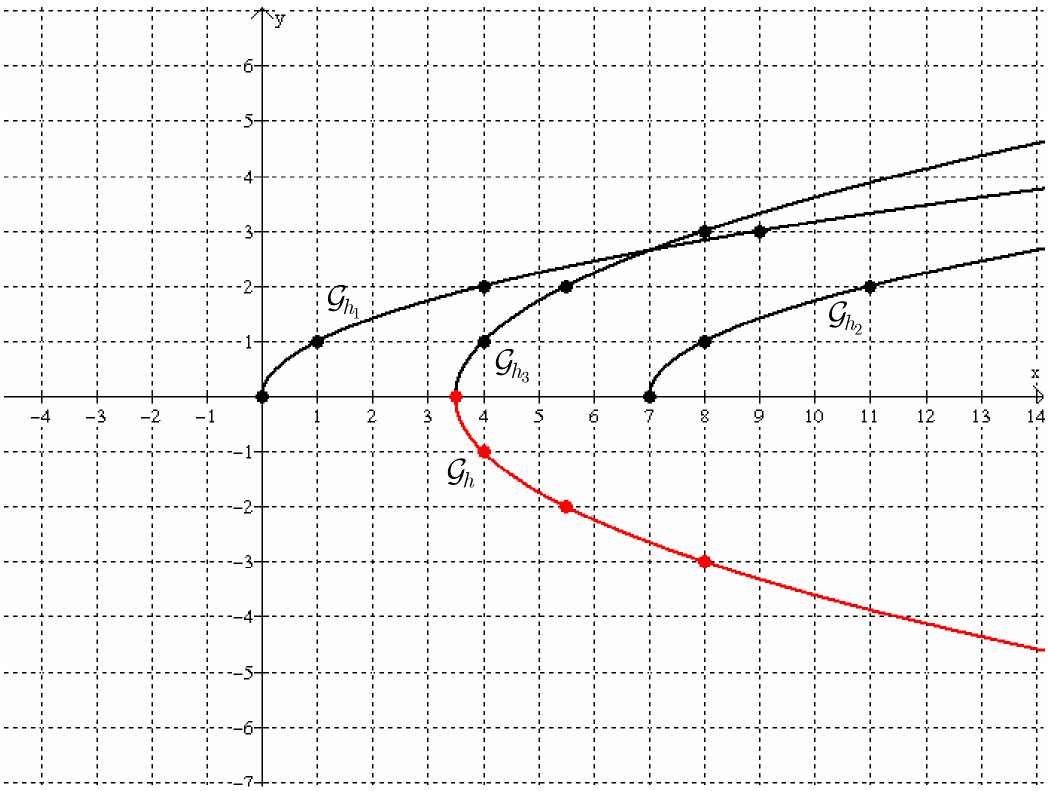
$h_2 : x \mapsto \sqrt{x-7}$ $\qquad h_2(x) = h_1(x-7)$

$h_3 : x \mapsto \sqrt{2x-7}$ $\qquad h_3(x) = h_2(2x)$

$h : x \mapsto -\sqrt{2x-7}$ $\qquad h(x) = -h_3(x)$

Donc, pour passer de $\mathcal{G}_{h_1}$ à $\mathcal{G}_h$, on additionne d'abord 7 aux abscisses, puis on divise les abscisses par 2 et finalement on multiplie les ordonnées par -1 (symétrie p.r. à Ox).


x
y
$\mathcal{G}_g$
$\mathcal{G}_{g_1}$
$\mathcal{G}_{g_2}$
$\mathcal{G}_{g_3}$


x
y
$\mathcal{G}_h$
$\mathcal{G}_{h_1}$
$\mathcal{G}_{h_2}$
$\mathcal{G}_{h_3}$

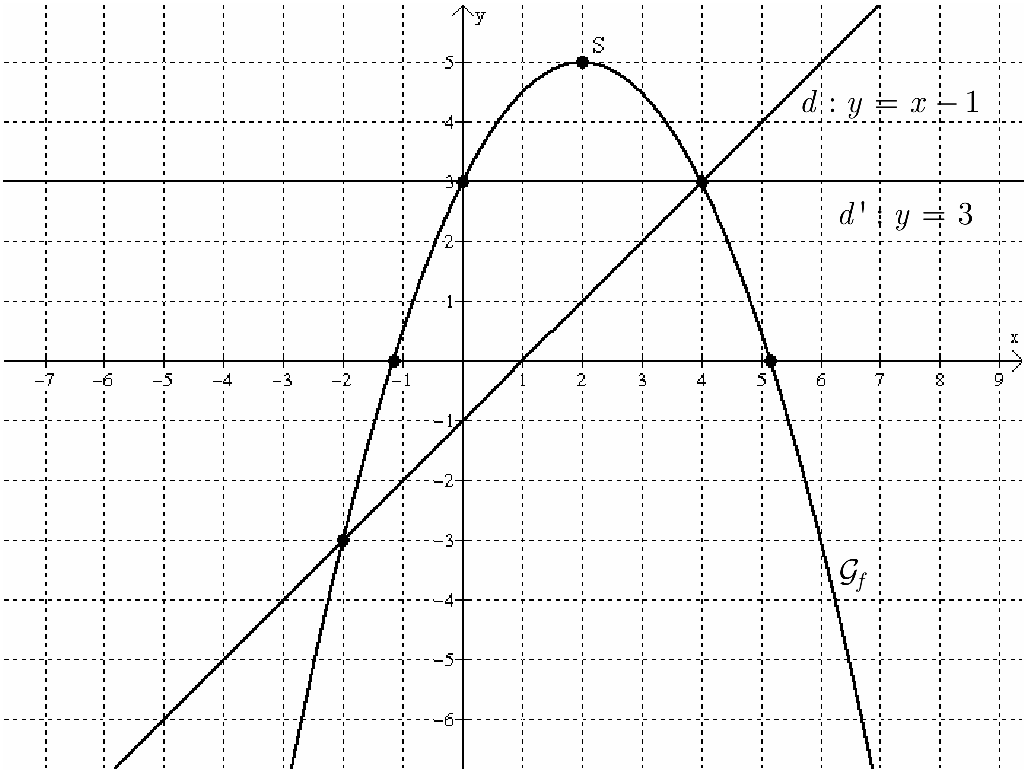
Question 3

(1) $\mathcal{G}_f$ est une parabole de sommet $S\left(\frac{-2}{-1}, \frac{-10}{-2}\right) = S(2,5)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Cette parabole et a comme équation $Y = -\frac{1}{2}X^2$ dans le repère $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Voici le tableau des images dans ce nouveau repère :

X	0	± 1	± 2	± 3	± 4
Y	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8



(2) Graphiquement : $f(x) \geq x - 1 \Leftrightarrow x \in [-2,4]$; on a représenté d'abord la droite d d'équation $y = x - 1$.

Algébriquement :

$$
\begin{aligned}
& f(x) \geq x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \geq x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{x^2}{2} + x + 4 \geq 0 / \cdot (-2) \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 8 \leq 0
\end{aligned}
$$

On détermine les racines de ce trinôme : -2 et 4. A l'aide d'un TDS on trouve : $S = [-2,4]$.

(3) On trace la droite d' : $y = 3$. On lit ensuite sur le graphique que l'ensemble des solutions de $f(x) < 3$ est $S =]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$.

(4) Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \simeq -1{,}2$ ou $x \simeq 5{,}2$.

Algébriquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2} + 2x + 3 = 0$.

Le discriminant a déjà été calculé pour déterminer le sommet : $\Delta = 10$.

Les racines sont donc : $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{10}}{-1} = 2 + \sqrt{10} \simeq 5{,}16$

et : $x_2 = 2 - \sqrt{10} \simeq -1{,}16$

Question 4

(1) $y = -\sqrt{2-x} - 1$

(2) $y = 5 - \frac{1}{2}x^2$

(3) $y = \dfrac{4}{x+3} - 1$

G. Lorang