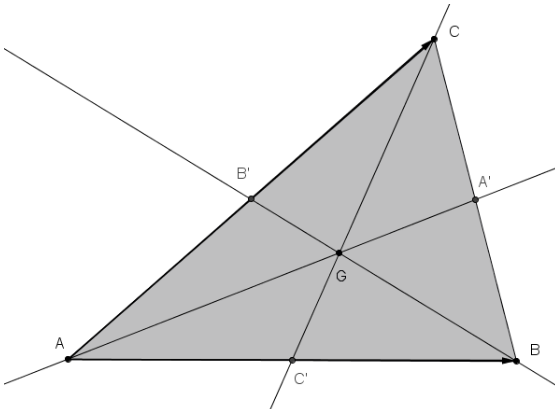
Question 1



(1) Les droites AA', BB' et CC' sont les ***médianes*** du triangle ABC. Leur point d'intersection est le ***centre de gravité*** du triangle ABC.

(2) Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:
$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $A'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et $C'\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(3) $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de BB' ; pente $= -\frac{1}{2}$

Donc $BB' \equiv y = -\frac{1}{2}x + k$.

$B\left(0,\frac{1}{2}\right) \in BB' \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

Donc : $BB' \equiv y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

De même : $CC' \equiv y = -2x + 1$.

(4) $G \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (1) \\ y = -2x + 1 & (2) \end{cases}$

(1) dans (2) : $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (3)

(3) dans (2) : $y = \frac{1}{3}$

Donc $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

(5) $\det\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AA'}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$, donc $G \in AA'$.

Question 2

(1) Figure : voir page suivante.

(2) $\tan\alpha = p_a \Leftrightarrow \tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 63{,}43°$ (angle orienté Ox, a)

$\tan\beta = p_b \Leftrightarrow \tan\beta = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \beta = -30{,}96°$ (angle orienté Ox,b)

(3) $d : y = 2x + k$ car $d \,//\, a$.

$A(4,1) \in d \Leftrightarrow 1 = 8 + k \Leftrightarrow k = -7$

Donc $d : y = 2x - 7$

(4) $e : y = \dfrac{5}{3}x + k'$ car $e \perp b$.

$A(4{,}1) \in e \Leftrightarrow 1 = \frac{20}{3} + k \Leftrightarrow k = \frac{17}{3}$

Donc $e : y = \frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$

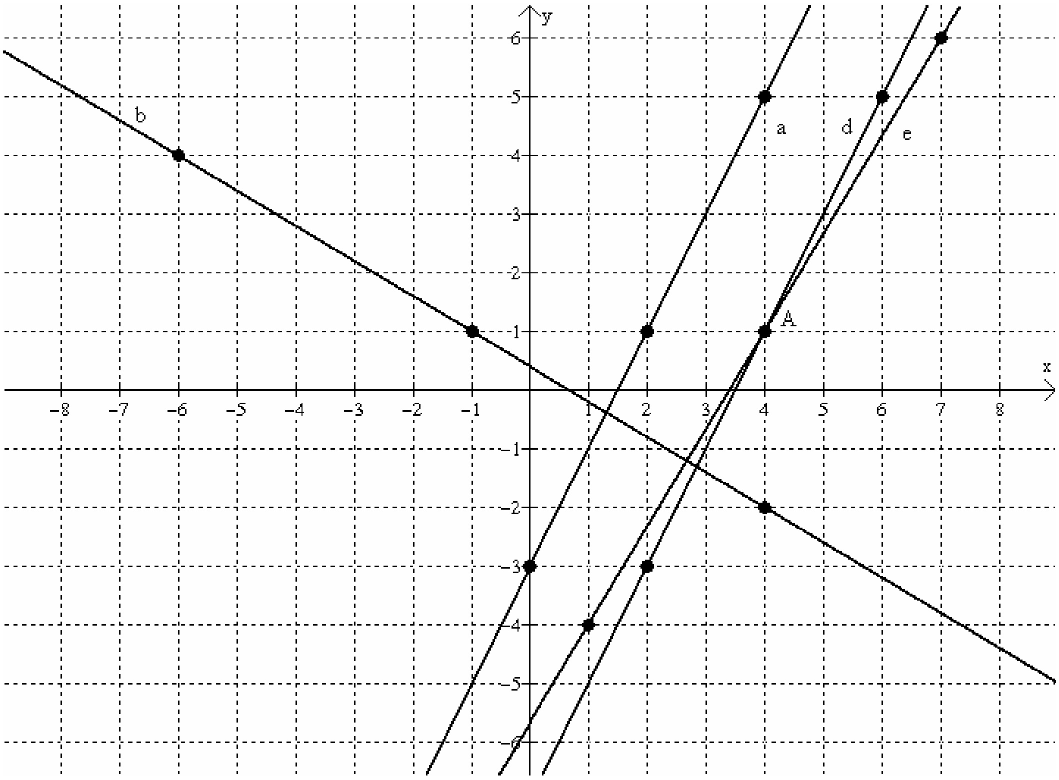


Figure de la question 1

Question 3

(1) $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{BC} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal B.

(2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cos \hat{B}$

Or, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, d'où l'équation :

$15 = 25 \cdot \cos \hat{B} \Leftrightarrow \cos \hat{B} = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \hat{B} = 53{,}13°$

Puisque ABC est donc isocèle de sommet principal B, les angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ ont même amplitude et mesurent :

$$\frac{180° - \hat{A}}{2} = 63,43°$$

(3) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux de h.

Donc $h \equiv 2x + y + c = 0$.

$B \in h \Leftrightarrow 6 - 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$.

Ainsi : $h \equiv 2x + y - 5 = 0$.

(4) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de AC

Donc $AC \equiv x - 2y + c' = 0$.

$C \in AC \Leftrightarrow 3 - 8 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = 5$.

Ainsi : $AC \equiv x - 2y + 5 = 0$.

(5) On résout le système formé par les équations de h et AC. On trouve $I(1,3)$.
Les élèves attentifs auront remarqué que : $I = \text{mil}[AC]$, car le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

(6) L'aire du triangle ABC est : $\dfrac{\overline{IB} \cdot \overline{AC}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10$ u.a.

En effet :

$$\begin{aligned}\overline{IB} &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

G. Lorang