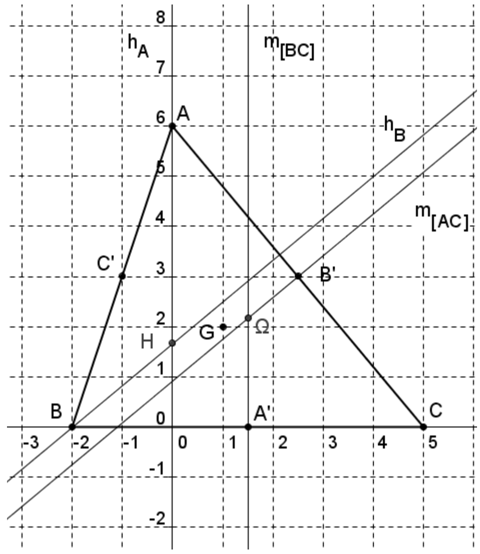
Question 1

(1) $G\left(\frac{0-2+5}{3},\frac{6+0+0}{3}\right)=G(1,2)$

(2) $h_A : x=0$ (droite passant par A et perpendiculaire à l'axe des abscisses)

$m_{[BC]} : x=\frac{3}{2}$ (droite passant par $A'=\text{mil}[BC]$ et perpendiculaire à Ox)



(3) Vecteur normal de h_B : $\overrightarrow{AC}(5,-6)$

Donc : $h_B : 5x-6y+c=0$.

$B(-2,0)\in h_B \Leftrightarrow -10+c=0 \Leftrightarrow c=10$

Donc : $h_B : 5x-6y+10=0$.

(4) $m_{[AC]} \parallel h_B$, donc $m_{[AC]} : 5x-6y+c'=0$

$B'=\text{mil}[AC]\in m_{[AC]}$

$\Leftrightarrow 5\cdot\frac{5}{2}-18+c'=0$

$\Leftrightarrow c'=\frac{11}{2}$

Donc : $m_{[AC]} : 5x-6y+\frac{11}{2}=0$.

(5) $H\begin{cases} x=0 \\ 5x-6y+10=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(0,\frac{5}{3}\right)$.

$\Omega\begin{cases} 5x-6y+\frac{11}{2}=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \Omega\left(\frac{3}{2},\frac{13}{6}\right)$

(6) On trouve : $\overrightarrow{GH}\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{G\Omega}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$ et on observe que : $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{G\Omega}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ sont donc colinéaires, c.-à-d. les points G, H et Ω sont alignés. (Rappelons que la droite passant par ces 3 points est appelée droite d'Euler.)

Question 2

(1) $\mathcal{C} : (x-7)^2+(y-1)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-14x-2y+25=0$

(2) $M(x,y)\in\mathcal{C}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+y^2-3y+2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-7x-3y+2=0$$

Donc $\mathcal{C}' : x^2+y^2-7x-3y+2=0$.

(3) $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'\begin{cases} x^2+y^2-14x-2y+25=0 & (1) \\ x^2+y^2-7x-3y+2=0 & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) : -7x + y + 23 = 0 \Leftrightarrow y = 7x - 23 \quad (3)$

(3) dans (2) : $x^2 + (7x-23)^2 - 7x - 3(7x-23) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 49x^2 - 322x + 529 - 7x - 21x + 69 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 50x^2 - 350x + 600 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

On calcule $\Delta = 49 - 48 = 1$ et on trouve : $x_1 = 3$ et $x_2 = 4 \quad (4)$

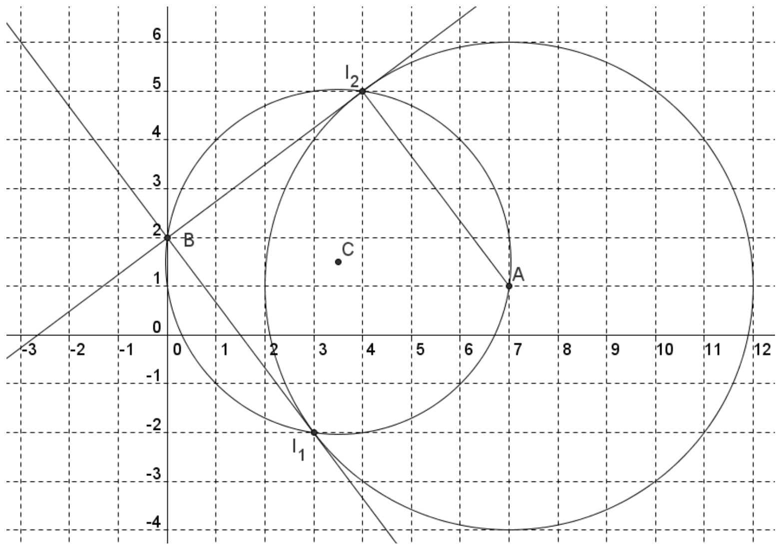
En remplaçant (4) dans (3) on trouve :

$$y_1 = -2 \text{ et } y_2 = 5$$

Les points d'intersection sont donc :

$$I_1(3,-2) \text{ et } I_2(4,5)$$

(4) Les droites BI_1 et BI_2 sont perpendiculaires aux rayons $[AI_1]$ et $[AI_2]$ respectivement car I_1 et I_2 appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AB]$. Ces droites sont donc les tangentes à $\mathcal{C}$ issues du point B.



On trouve : $BI_1 : y = -\frac{4}{3}x + 2$ et $BI_2 : y = \frac{3}{4}x + 2$

Question 3

(1) a) $\mathcal{E} : x^2 + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + 3 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 2$

$\mathcal{E}$ est le cercle de centre $A(-1,-2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) $\mathcal{F} : x^2 + 2x + y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = -x^2 - 2x - 3$

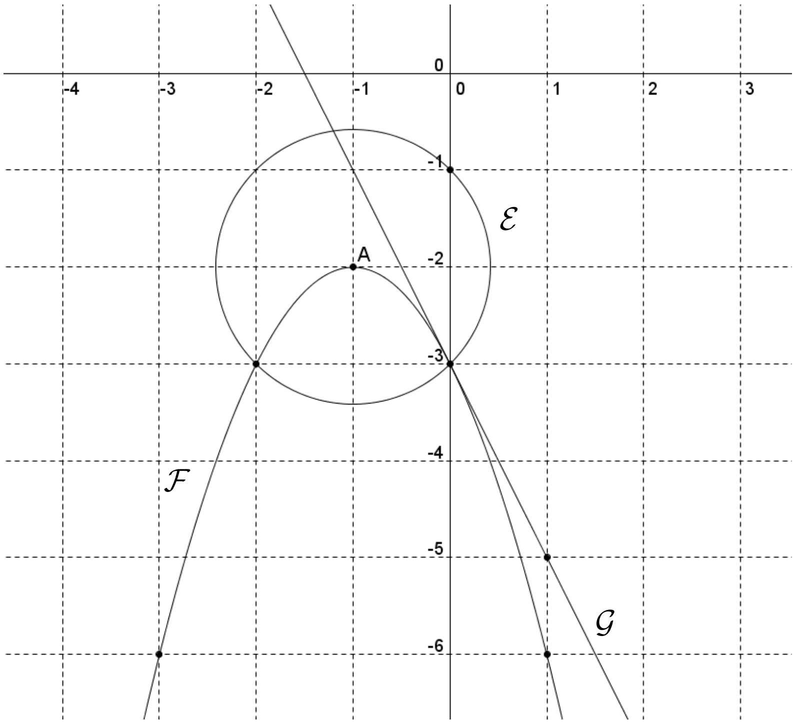
$\mathcal{F}$ est une parabole dirigée vers le bas.

Le sommet est $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = A(-1,-2)$.

Dans le repère $\left(A,\vec{i},\vec{j}\right)$, cette parabole a comme équation : $Y=-X^2$.

c) $\mathcal{G}: 2x+y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-3$

$\mathcal{G}$ est une droite de coefficient directeur –2 et d'ordonnée à l'origine –3.



(2) $\mathcal{E}\cap\mathcal{F}\begin{cases}x^2+y^2+2x+4y+3=0 & (1)\\ x^2+2x+y+3=0 & (2)\end{cases}$

(1) – (2) : $y^2+3y=0 \Leftrightarrow y(y+3)=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $y=-3$ (3)

(3) dans (2) :

- $y=0 \Rightarrow x^2+2x+3=0$, $\Delta=4-12=-8<0$, impossible
- $y=-3 \Rightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$

Donc : $S=\{(-2,-3),(0,-3)\}$

G. Lorang