Exercice 1

Voir cours.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x^2-4}$.

(1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

(2) f est paire car $\left(\forall x \in \mathcal{D}_f\right)$ $f(-x) = 2 - \dfrac{1}{(-x)^2-4} = 2 - \dfrac{1}{x^2-4} = f(x)$.

(3) On étudie d'abord le sens de variation de f sur $]2,+\infty[$:

$$
\begin{aligned}
(\forall x_1,x_2 \in\,]2,+\infty[) \quad & x_1 < x_2 \;/(\ )^2 \\
& \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \;/-4 \\
& \Rightarrow \underbrace{x_1^2-4}_{+} < \underbrace{x_2^2-4}_{+} \;/\text{ inverser} \\
& \Rightarrow \frac{1}{x_1^2-4} > \frac{1}{x_2^2-4} \;/\cdot(-1) \\
& \Rightarrow -\frac{1}{x_1^2-4} < -\frac{1}{x_2^2-4} \;/+2 \\
& \Rightarrow 2-\frac{1}{x_1^2-4} < 2-\frac{1}{x_2^2-4} \\
& \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}
$$

Donc, f est strictement croissante sur $]2,+\infty[$.

On étudie de la même façon le sens de variation de f sur $[0,2[$:

$$
\begin{aligned}
(\forall x_1,x_2 \in [0,2[) \quad & x_1 < x_2 \;/(\ )^2 \\
& \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \;/-4 \\
& \Rightarrow \underbrace{x_1^2-4}_{-} < \underbrace{x_2^2-4}_{-} \;/\text{ inverser} \\
& \Rightarrow \frac{1}{x_1^2-4} > \frac{1}{x_2^2-4} \;/\cdot(-1) \\
& \Rightarrow -\frac{1}{x_1^2-4} < -\frac{1}{x_2^2-4} \;/+2 \\
& \Rightarrow 2-\frac{1}{x_1^2-4} < 2-\frac{1}{x_2^2-4} \\
& \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}
$$

Donc, f est strictement croissante sur $[0,2[$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2 - \frac{1}{x^2-4} = 2$ et $\displaystyle\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} 2 - \frac{1}{\underbrace{x^2-4}_{\to 0^\pm}} = \mp\infty$.

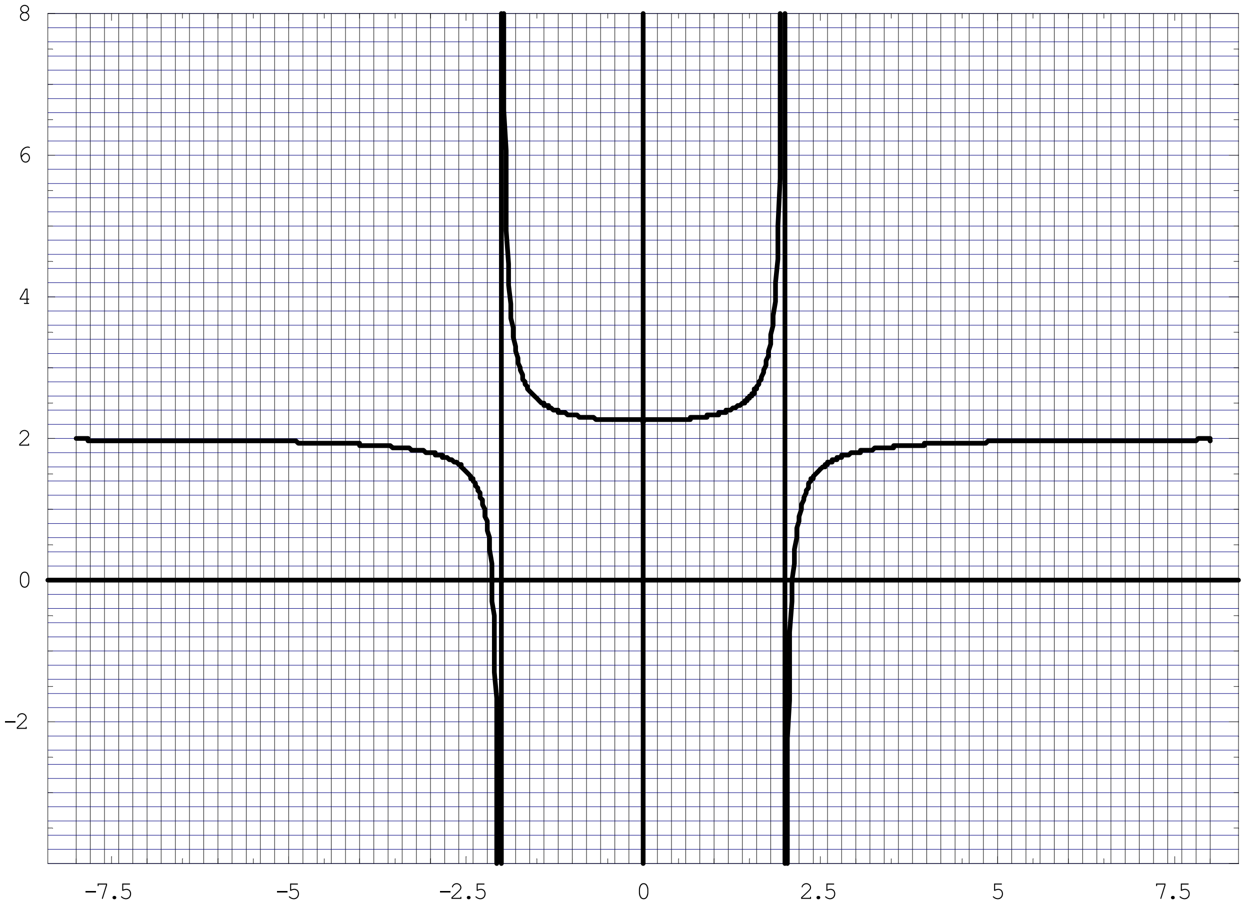
Tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{9}{4}$(min)	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	2

(5) Tableau des images :

x	1	1,5	1,9	2,1	3	5
$f(x)$	2,33	2,57	4,56	-0,44	1,8	1,95

(6) Représentation graphique :



Exercice 3

(1) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+2}{1-2x}}$

C.E. : $\dfrac{x+2}{1-2x} \geq 0$

Tableau du signe de $\dfrac{x+2}{1-2x}$:

X	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+2$	-	0	+		+
$1-2x$	+		+	0	-
$(x+2)(1-2x)$	-	0	+	X	-

Donc : $\mathcal{D}_f = \left[-2, \frac{1}{2}\right[$.

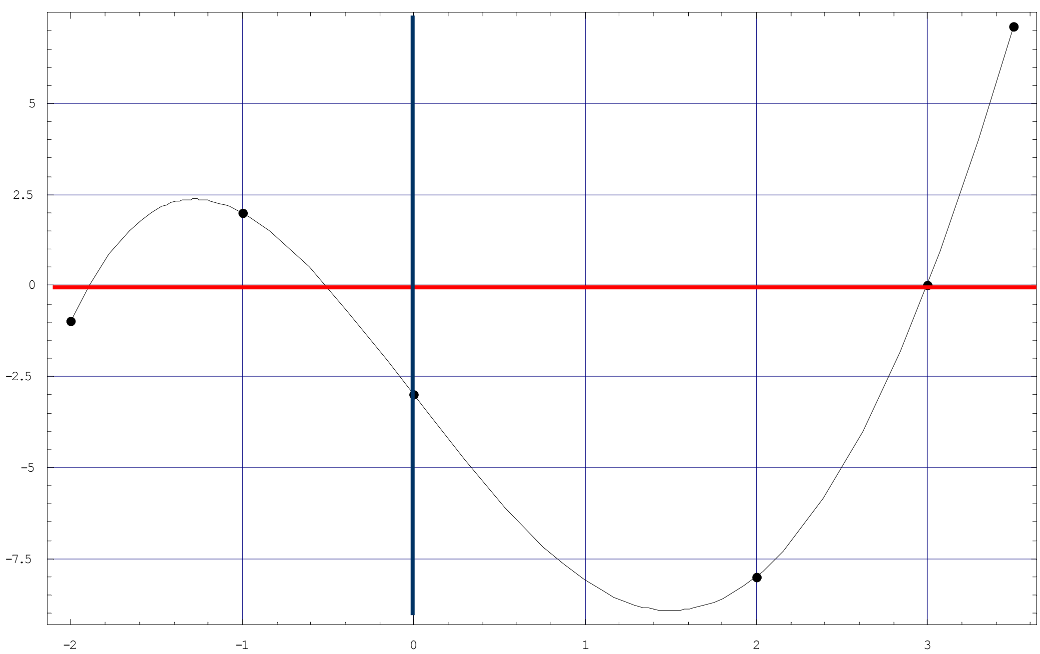
(2) $g : x \mapsto \sqrt{2-4x} + \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$

C.E. : $\begin{cases} 2-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc : $\mathcal{D}_g = \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 4 10 (=1+1+2+2+2+2) points

On considère la représentation graphique d'une fonction f :



(1) Voir figure.

(2) $\mathcal{D}_f = \left[-2\, ;\, 3{,}5\right]$

(3) f a un maximum (relatif) égal à 2,4 en –1,3.

f a un maximum (absolu) égal à 7 en 3,5.

f a un minimum (relatif) égal à -1 en –2.

f a un minimum (absolu) égal à -9 en 1,5.

(4) Les images de –2, -1, 0, 2, 3 :

x	-2	-1	0	2	3
$f(x)$	-1	2	-3	-8	0

(5) f a trois racines : -1,85, -0,55 et 3.

(6) $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in [-2;-1,75[\cup]-0,7;3,1[$