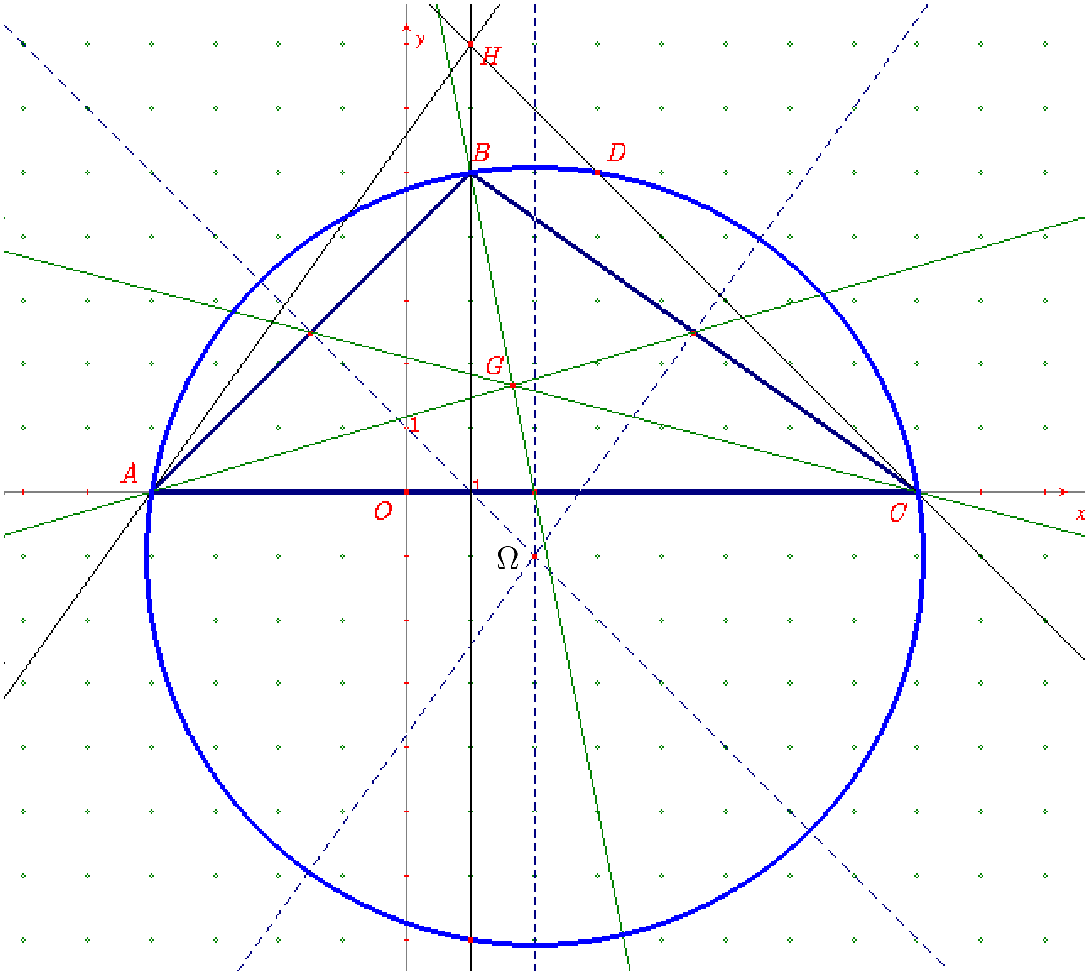
Exercice 2



$A(-4{,}0)$, $B(1{,}5)$ et $C(8{,}0)$

(1) Voir ci-dessus.

(2) $\overrightarrow{AB}(5{,}5)$ et $\overrightarrow{BC}(7,-5)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 5\cdot 7 + 5\cdot(-5) = 10 \neq 0$, donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

(3) $G\left(\frac{-4+1+8}{3},\frac{0+5+0}{3}\right) = G\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$.

(4) $h_B =$ hauteur issue de B. $h_B // (Oy) \Rightarrow h_B : x = 1$.

$h_A =$ hauteur issue de A. $h_A \perp BC \Rightarrow h_A : 7x - 5y + c = 0$.

$A \in h_A \Leftrightarrow -28 + c = 0 \Leftrightarrow c = 28$. Donc : $h_A : 7x - 5y + 28 = 0$.

$\{H\} = h_A \cap h_B$, donc H est solution du système

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ 7x - 5y + 28 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) donne immédiatement : $y = 7$. Donc $H(1{,}7)$.

(5) $m_{[AC]}$ = médiatrice de $[AC]$, passe par le milieu $B'(2{,}0)$ de $[AC]$.

$m_{[AC]} // (Oy) \Rightarrow m_{[AC]} : x = 2$.

$m_{[BC]}$ = médiatrice de $[BC]$, passe par le milieu $A'\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$ de $[BC]$.

$m_{[BC]} \perp BC \Rightarrow m_{[BC]} : 7x - 5y + c = 0$.

$A'\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right) \in m_{[BC]} \Leftrightarrow \frac{63}{2} - \frac{25}{2} + c = 0 \Leftrightarrow c = -19$. Donc :

$m_{[BC]} : 7x - 5y - 19 = 0$.

$\{\Omega\} = m_{[AC]} \cap m_{[BC]}$, donc Ω est solution du système

$$\begin{cases} x = 2 & (1') \\ 7x - 5y - 19 = 0 & (2') \end{cases}$$

(1') dans (2') donne immédiatement : $y = -1$. Donc $\Omega(2,-1)$.

(6) $G\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$, $H(1{,}7)$, $\Omega(2,-1)$, $\overrightarrow{GH}\left(-\frac{2}{3},\frac{16}{3}\right)$, $\overrightarrow{H\Omega}(1,-8)$;

$\det\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{H\Omega}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{16}{3} & -8 \end{vmatrix} = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 0$, G, H et Ω sont alignés.

(7) Le rayon du cercle circonscrit est :

$r = \Omega A = \sqrt{(-4-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{37} \simeq 6{,}08$ cm. Bien sûr, on aurait également pu obtenir r en calculant ΩB ou ΩC.

(8) Posons $D(x_D, y_D)$. On a :

$$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 7 \end{pmatrix} \perp \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 5(x_D - 1) + 5(y_D - 7) = 0 / : 5$$

$$\Leftrightarrow x_D + y_D - 8 = 0 \ (3)$$

Par ailleurs, le milieu de $[HD]$, soit le point $I\left(\dfrac{1+x_D}{2},\dfrac{7+y_D}{2}\right)$ appartient à AB.

Or, $\overrightarrow{AB}(5{,}5)$, ou $\vec{u}(1{,}1)$, est un vecteur directeur de AB. Donc :

$AB : x - y + c = 0$. Mais : $A(-4{,}0) \in AB \Leftrightarrow -4 - 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4$.

Donc : $AB : x - y + 4 = 0$. D'où le système :

$$\begin{cases} x_D + y_D - 8 = 0 \\ \dfrac{1+x_D}{2} - \dfrac{7+y_D}{2} + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + y_D - 8 = 0 \\ 1 + x_D - 7 - y_D + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + y_D - 8 = 0 & (3) \\ x_D - y_D + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

(3) + (4) donne : $x_D = 3$ et (3) − (4) donne : $y_D = 5$. Donc : $D(3{,}5)$

Question bonus : Il suffit de vérifier que $\Omega D = r = \sqrt{37}$. Or :

$\Omega D = \sqrt{(3-2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37}$, ce qu'il fallait démontrer.