Exercice 2

Soit ABC le triangle cherché. Utilisons les notations habituelles du cours et posons $a = 3\sqrt{2}$ cm et $b = 3$ cm . Or :

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma &\Leftrightarrow 4{,}5 = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sin\gamma \\ &\Leftrightarrow 9 = 9\sqrt{2}\sin\gamma \\ &\Leftrightarrow \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \gamma = 45° \text{ ou } \gamma = 135°. \end{aligned}$$

1er cas : $\boxed{\gamma = 45°}$

Appliquons la relation au cosinus :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\Leftrightarrow c^2 = 18 + 9 - 18\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow c^2 = 9$

$\Leftrightarrow c = 3$

Le triangle est donc isocèle, car $b = c$.

Par conséquent : $\beta = \gamma = 45°$ et $\alpha = 180° - 2\cdot 45° = 90°$.

Donc : ABC est ***rectangle isocèle***.

2e cas : $\boxed{\gamma = 135°}$

Appliquons la relation au cosinus :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\Leftrightarrow c^2 = 18 + 9 - 18\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow c^2 = 45$

$\Leftrightarrow c = 3\sqrt{5}$

Comme le triangle ABC a un angle obtus (c'est $\gamma = 135°$), les deux autres angles sont aigus et on peut les calculer grâce à la relation aux sinus :

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

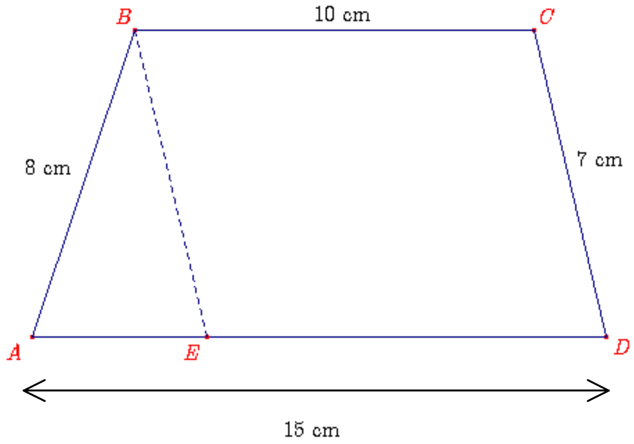
$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\beta} = 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin\beta} = 3\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \alpha = 26{,}565°$ et $\beta = 18{,}435°$

Exercice 3



Comme $BCDE$ est un parallélogramme, on a $\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{ED} = 15 - 10 = 5$ cm et $\overline{BE} = 7$ cm. Donc, connaissant les trois côtés du triangle ABE, on peut le résoudre.

Posons : $\widehat{BAE} = \alpha$ et $\widehat{BEA} = \widehat{D} = \delta$.

Relation au cosinus dans le triangle ABE :

$$\begin{aligned}
&\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{AE} \cos\alpha \\
&\Leftrightarrow 49 = 64 + 25 - 80\cos\alpha \\
&\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \alpha = 60^\circ
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
&\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cos\delta \\
&\Leftrightarrow 64 = 25 + 49 - 70\cos\delta \\
&\Leftrightarrow \cos\delta = \frac{10}{70} = \frac{1}{7} \\
&\Leftrightarrow \delta = 81.78679^\circ = 81^\circ 47' 12{,}4''
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\widehat{ABE} = 180^\circ - 60^\circ - 81^\circ 47' 12{,}4'' = 38^\circ 12' 47{,}6''$$

Donc, dans le trapèze $ABCD$, on a :

$\widehat{A} = \alpha = 60^\circ$, $\widehat{B} = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$ (car $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$) ;

$\widehat{D} = \delta = 81^\circ 47' 12{,}4''$ et $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{D} = 98^\circ 12' 47{,}6''$ (car $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$).

Question bonus :

Hauteur du trapèze : $\overline{BH} = \overline{AB}\sin\alpha = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm

Aire du trapèze $ABCD$: $\frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \cdot \overline{BH} = \frac{25}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ cm^2.

G. Lorang