Exercice 1

(1) $\left(3x^3-5x^2-2x\right)\left(-x^2+5x-7\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^3-5x^2-2x=0 \text{ ou } -x^2+5x-7=0$

$\Leftrightarrow x\left(3x^2-5x-2\right)=0 \text{ ou } -x^2+5x-7=0$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 3x^2-5x-2=0 \text{ ou } -x^2+5x-7=0$

$\Delta=49$ $\quad$ $\Delta=25-28=-3<0$

$x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{3}$ $\quad$ pas de racines

Donc : $S=\left\{0,2,-\frac{1}{3}\right\}$.

(2) $\underbrace{2x^3+5x^2-4x-12}_{p(x)}=0$

Racine évidente : -2.

Donc : $p(x)$ est divisible par $x+2$.

Schéma de Horner :

	2	5	-4	-12
-2		-4	-2	12
	2	1	-6	0

Donc : $p(x)=(x+2)\underbrace{\left(2x^2+x-6\right)}_{q(x)}$

Racines de q : -2 et $\frac{3}{2}$, donc $q(x)=2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$.

Finalement : $p(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$

$S=\left\{-2,\frac{3}{2}\right\}$.

(3) $\dfrac{x^2-1}{x^2-8x+16}+\dfrac{x}{4-x}=\dfrac{1}{3}$

C.E. : i) $x^2-8x+16\neq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$

ii) $4-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4$

Donc : $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

$(\forall x\in D)$

$$\frac{x^2-1}{x^2-8x+16}+\frac{x}{4-x}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x-4)^2}-\frac{x(x-4)}{(x-4)^2}=\frac{1}{3} \quad /\cdot 3(x-4)^2$$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-1\right)-3x(x-4)=(x-4)^2$

$\Leftrightarrow 3x^2-3-3x^2+12x=x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow x^2-20x+19=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=19$

$S=\{1{,}19\}$

Exercice 2

(1) $\left(x^2-4\right)^3\left(2x^4-32\right)^2\left(7x^2-11x-6\right)$

$=[(x-2)(x+2)]^3\,4\left(x^4-16\right)^2\cdot 7(x-2)\left(x+\frac{3}{7}\right)$

$=(x-2)^3(x+2)^3\,4\left(x^2-4\right)^2\left(x^2+4\right)^2(x-2)(7x+3)$

$=4(x-2)^4(x+2)^3(x-2)^2(x+2)^2\left(x^2+4\right)^2(7x+3)$

$=4(x-2)^6(x+2)^5\left(x^2+4\right)^2(7x+3)$

(2) $$r(x)=\frac{\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}{-\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{15}}=\frac{15\left(x^2-4x+4\right)}{-8\left(3x^2-5x-2\right)}=\frac{15(x-2)^2}{-8(x-2)(3x+1)}$$

Donc : $D_r=\mathbb{R}\setminus\left\{2,-\frac{1}{3}\right\}$ et $(\forall x\in D_r)\ \ r(x)=-\dfrac{15(x-2)}{8(3x+1)}$

Exercice 3 — 8 points

Soit a et b les deux nombres cherchés :

$$\begin{cases} a-b=10 & (1)\\ ab=100 & (2)\end{cases}$$

D'après (1) : $a=b+10$

D'où, en remplaçant dans (2) :

$$b(b+10)=100$$

$$\Leftrightarrow b^2+10b-100=0$$

$$\Delta=100+400=500$$

$$b_1=\frac{-10-10\sqrt{5}}{2}=-5-5\sqrt{5}$$

$$b_2=-5+5\sqrt{5}$$

Si $b=-5-5\sqrt{5}=-5\left(1+\sqrt{5}\right)$ alors $a=5-5\sqrt{5}=5\left(1-\sqrt{5}\right)$,

si $b=-5+5\sqrt{5}=5\left(\sqrt{5}-1\right)$ alors $a=5+5\sqrt{5}=5\left(\sqrt{5}+1\right)$.

G. Lorang