Exercice 1

(1) Racines du trinôme $8x^2-15x-2$: $\Delta=289$, $x_1=\frac{15-17}{16}=-\frac{1}{8}$, $x_2=2$.

Racines du trinôme x^2-5 : $x'_1=\sqrt{5}$, $x'_2=-\sqrt{5}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$-\frac{1}{8}$		2		$\sqrt{5}$	$+\infty$
$8x^2-15x-2$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
x^2-5	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$(8x^2-15x-2)(x^2-5)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

(2) a) C.E. : $\left(8x^2-15x-2\right)\left(x^2-5\right)\geq 0$

$\mathcal{D}_f=\,]-\infty,-\sqrt{5}\,]\cup[-\frac{1}{8},2]\cup[\sqrt{5},+\infty[$

b) C.E. : $\begin{cases}8x^2-15x-2\geq 0\\ x^2-5\geq 0\end{cases}$

$\mathcal{D}_g=\,]-\infty,-\sqrt{5}\,]\cup[\sqrt{5},+\infty[$

c) C.E. : $\dfrac{8x^2-15x-2}{x^2-5}\geq 0$

$\mathcal{D}_h=\,]-\infty,-\sqrt{5}\,[\cup[-\frac{1}{8},2]\cup]\sqrt{5},+\infty[$

d) C.E. : $\begin{cases}8x^2-15x-2>0\\ x^2-5\neq 0\end{cases}$

$\mathcal{D}_k=\,]-\infty,-\sqrt{5}\,[\cup]-\sqrt{5},-\frac{1}{8}[\cup]2,\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5},+\infty[$

$=\left(]-\infty,-\frac{1}{8}[\cup]2,+\infty[\right)\setminus\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

e) C.E. : $\begin{cases}8x^2-15x-2>0\\ x^2-5\geq 0\end{cases}$

$\mathcal{D}_l=\,]-\infty,-\sqrt{5}\,]\cup[\sqrt{5},+\infty[$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $x\left(\sqrt{3}x-1\right)\geq(3x-1)\left(\sqrt{3}x+1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2-x\geq 3\sqrt{3}x^2+3x-\sqrt{3}x-1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x^2+\left(4-\sqrt{3}\right)x-1\geq 0$

Cherchons les racines du trinôme $2\sqrt{3}x^2+\left(4-\sqrt{3}\right)x-1$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(4-\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot(-1)\\ &= 16 - 8\sqrt{3} + 3 + 8\sqrt{3}\\ &= 19\\ x_1 &= \frac{-4+\sqrt{3}-\sqrt{19}}{4\sqrt{3}} = \frac{3-4\sqrt{3}-\sqrt{57}}{12}\\ x_2 &= \frac{-4+\sqrt{3}+\sqrt{19}}{4\sqrt{3}} = \frac{3-4\sqrt{3}+\sqrt{57}}{12}\end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{3-4\sqrt{3}-\sqrt{57}}{12}$		$\frac{3-4\sqrt{3}+\sqrt{57}}{12}$	$+\infty$
$2\sqrt{3}x^2+\left(4-\sqrt{3}\right)x-1$	$+$	0	-	0	$+$

Donc : $S = \left]-\infty, \frac{3-4\sqrt{3}-\sqrt{57}}{12}\right] \cup \left[\frac{3-4\sqrt{3}+\sqrt{57}}{12}, +\infty\right[$.

(2) $\quad \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{13}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{6x(x+1)}{6(x-3)(x+1)} - \frac{12(x-3)}{6(x-3)(x+1)} \geq \frac{13(x-3)(x+1)}{6(x-3)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2+6x-12x+36-13\left(x^2-2x-3\right)}{6(x-3)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7x^2+20x+75}{6(x-3)(x+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7(x-5)\left(x+\frac{15}{7}\right)}{6(x-3)(x+1)} \geq 0$$

La factorisation du trinôme au numérateur est évidemment obtenue en passant par le discriminant $\Delta = 20^2 + 4\cdot 7\cdot 75 = 400 + 2100 = 2500 = 50^2$.

D'où le tableau du signe de premier membre de la dernière ligne :

x	$-\infty$	$-\frac{15}{7}$		-1		3		5	$+\infty$
$-7x^2+20x+75$	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	-
$6(x-3)(x+1)$	$+$	$+$	$+$	0	-	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-7x^2+20x+75}{6(x-3)(x+1)}$	-	0	$+$	$\|\|$	-	$\|\|$	$+$	0	-

Donc : $S = \left[-\frac{15}{7}, -1\right[\cup \left]3, 5\right]$.

(3) $\quad \dfrac{\left(4-y^2\right)\left(y^2+6y+5\right)}{(-2y+1)\left(y^2+6y+9\right)^2} \geq 0$

Racines de y^2+6y+5 : -1 et -5

Racines de $4-y^2$: 2 et -2

Racine de $-2y+1$: $\frac{1}{2}$

Racine double de $y^2+6y+9 = (y+3)^2$: -3

x	$-\infty$	-5		-3		-2		-1		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$4-y^2$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	-
y^2+6y+5	+	0	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$-2y+1$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-
$\left(y^2+6y+9\right)^2$	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\dfrac{\left(4-y^2\right)\left(y^2+6y+5\right)}{(-2y+1)\left(y^2+6y+9\right)^2}$	-	0	+	$\|\|$	+	0	-	0	+	$\|\|$	-	0	+

Donc : $S=[-5,-3[\cup]-3,-2]\cup\left[-1,\frac{1}{2}\right[\cup[2,+\infty[$

G. Lorang