Question 1

(1) $\dfrac{1}{a\sqrt[4]{b}}$ existe ssi $a \neq 0$ et $b > 0$.

(2) $\sqrt[n]{(-3)^p}$ existe ssi n est impair ou p est pair.

(3) $-\sqrt[7]{a \cdot b^{-1}}$ existe ssi $b \neq 0$.

(4) $\sqrt{a^3 b^9}$ existe ssi a et b sont de même signe.

(5) $\sqrt[6]{2x-3}$ existe ssi $2x - 3 \geq 0$ c.-à-d. $2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

(6) $\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^{-1}}$ existe ssi $a \geq 0$ et $b > 0$.

Question 2

(1) $8x^3 = -27 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2}$.

(2) $x^6 - 9^{-15} = 0 \Leftrightarrow x^6 = 3^{-30} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[6]{3^{-30}} \Leftrightarrow x = \pm 3^{-5} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{243}$.

(3) $x^5 + 16x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^4 + 16\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\underbrace{x^4 = -16}_{\text{impossible}} \Leftrightarrow x = 0$.

Question 3 16 (=8+8) points

(1) $\sqrt[3]{16^{-2} \cdot x^5 \cdot \sqrt[4]{y}} \cdot \sqrt{2^5 \sqrt{x^2 y^{-3}}}$

$$= \left(16^{-2} \cdot x^5 \cdot y^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^5 \left(x^2 y^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2^{-8} x^5 y^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^5 x y^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{-\frac{8}{3}} x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{12}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{-\frac{1}{6}} x^{\frac{13}{6}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{x^2 \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{y^2}}$$

(2) $\dfrac{x \cdot \sqrt[4]{5x^3} \cdot \sqrt[3]{25y^{-6}}}{\left(5^{-\frac{1}{6}} \sqrt{x\sqrt{y^3}}\right)^2}$

$$= \frac{x \cdot \left(5x^3\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(5^2 y^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{1}{3}} x y^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 5^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} \cdot x^{1+\frac{3}{4}-1} \cdot y^{-2-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[4]{5x^3}}{y^3 \sqrt{y}}$$

Question 4

(1) On trouve $P(x) = \left(x^4 - 2\right)\left(x^2 - 3x - 4\right)$. La division est exacte !

(2) Appelons $Q(x) = x^2 - 3x - 4$ le quotient dans la division euclidienne précédente. $Q(-1) = 1 + 3 - 4 = 0$, c.-à-d. -1 est une racine de Q. C'est donc aussi une racine de P.

(3) On divise $Q(x)$ par $x+1$ à l'aide d'un schéma de Horner. On trouve : $Q(x) = (x+1)\cdot(x-4)$. Donc :

$$P(x) = \left(x^4 - 2\right)(x+1)(x-4)$$
$$\left[= \left(x^2 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\right)(x+1)(x-4)\right]$$

(4) On résout l'équation :

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 = 2 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{2} \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 4$$

Les racines de $P(x)$ sont donc $\pm\sqrt[4]{2}$ -1 et $x = 4$.

Question 5

$A(x) = 3x^2 - (m+2)x + (2m+1)$

(1) $A(x)$ est divisible par $x+2$

$\Leftrightarrow A(-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3\cdot 4 + 2(m+2) + (2m+1) = 0$

$\Leftrightarrow 12 + 2m + 4 + 2m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m + 17 = 0$

$\Leftrightarrow m = -\frac{17}{4}.$

(2) Comme $3x - 4 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)$ et que le reste de la division par $3x-4$ est le même que le reste de la division par $x - \frac{4}{3}$, on doit avoir (condition nécessaire et suffisante) :

$$A\left(\tfrac{4}{3}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot\tfrac{16}{9} - (m+2)\tfrac{4}{3} + (2m+1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{16}{3} - \tfrac{4}{3}m - \tfrac{8}{3} + 2m + \cancel{1} = \cancel{1}$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{2}{3}m = -\tfrac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow m = -4$$

G. Lorang