4C1 Corrigé du devoir de mathématiques I,2 15.11.05

Question 1

(1) a) $A =]2,5] \cup]-\infty,3] =]-\infty,5]$

b) $B = [-\frac{7}{3},4[\cap]-2,\frac{19}{4}[=]-2,4[$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} / x < 3\} \cap]-2,2[= \{-1,0,1\}$

d) $D = \Big([-2,0] \cup]0,6[\Big) \cap]-\infty,-5[= \varnothing$

(2) Soit x le nombre d'exercices que Mathilde doit faire par jour.

$$15x + 31 \geq 100$$
$$\Leftrightarrow 15x \geq 69$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{69}{15} = 4,6$$

Mathilde doit donc faire au moins 5 exercices par jour.

Question 2

(1) Valeurs critiques : $x = 0$, $x = 3$, $x = -\dfrac{5}{2}$ et $x = -\dfrac{8}{3}$.

x	$-\infty$	$-\frac{8}{3}$		$-\frac{5}{2}$		0		3	$+\infty$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(3-x)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$
$(2x+5)^3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-3x-8$	$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$
$T(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

L'inéquation $T(x) \geq 0$ a donc comme ensemble de sol. $S =]-\infty,-\frac{8}{3}[\cup]-\frac{5}{2},0] \cup \{3\}$.

(2) $$\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{6} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(3-x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{6} - \frac{x-2}{6} > \frac{3}{6} - \frac{2(3-x)}{6}$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3 - x + 2 > 3 - 6 + 2x$$
$$\Leftrightarrow \cancel{2x} - 1 > -3 + \cancel{2x}$$
$$\Leftrightarrow -1 > -3$$

Vrai ! Donc $S = \mathbb{R}$.

Question 3

(1) $P(x) = (x+2)^2(3x-4)$. Racines : -2 et $\frac{4}{3}$.

(2) $Q(x) = (3x-4)^2(x-1)$. Racines : $\frac{4}{3}$ et 1 .

(3) C.E. : $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{4}{3}$ et $x \neq 1$. Donc :

$$R(x) = \frac{(x+2)^2\,\cancel{(3x-4)}}{(x-1)(3x-4)^{\cancel{2}}} = \frac{(x+2)^2}{(x-1)(3x-4)}.$$

(4) $R(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ (et $Q(x) \neq 0$) $\Leftrightarrow x = -2$ ou $\underbrace{x = \frac{4}{3}}_{\text{à exclure (voir C.E.)}} \Leftrightarrow x = -2$.

(5) On effectue la division euclidienne du numérateur $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ par le dénominateur $(x-1)(3x-4) = 3x^2 - 7x + 4$ et on trouve :

$$(x+2)^2 = (x-1)(3x-4) \cdot \frac{1}{3} + 19x + 8 \;/ : (x-1)(3x-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{(x-1)(3x-4)} = \frac{1}{3} + \frac{19x+8}{3 \cdot (x-1)(3x-4)}$$

Donc : $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{19}{3}$ et $c = \dfrac{8}{3}$.

G. Lorang