Question 1

(1) $x^2 - 4 \geq (3x-5)(2-x)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq (3x-5)(2-x)$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) - (3x-5)(2-x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + (3x-5)(x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[(x+2) + (3x-5)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(4x-3) \geq 0$

Valeurs critiques : 2, $\frac{3}{4}$

Tableau du signe :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$		2	$+\infty$
$x-2$	-		-	0	+
$4x-3$	-	0	+		+
$(x-2)(4x-3)$	+	0	-	0	+

Donc : $S =]-\infty, \frac{3}{4}] \cup [2, +\infty[$.

(2) $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{x-1}{3(x-3)} \geq -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-2)(x-3)}{6x(x-3)} - \frac{2x(x-1)}{6x(x-3)} \geq -\frac{3x(x-3)}{6x(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-2)(x-3) - 2x(x-1) + 3x(x-3)}{6x(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 - 30x + 36 - 2x^2 + 2x + 3x^2 - 9x}{6x(x-3)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^2 - 37x + 36}{6x(x-3)} \geq 0$$

Il faut factoriser le numérateur $P(x) = 7x^2 - 37x + 36$, donc on en cherche une racine entière. On trouve : $P(4) = 0$. Par conséquent, $P(x)$ est divisible par $x - 4$. Le schéma de Horner donne :

$$P(x) = (x-4)(7x-9)$$

L'inéquation s'écrit donc :

$$\frac{(x-4)(7x-9)}{6x(x-3)} \geq 0$$

Valeurs critiques : 4, $\frac{9}{7}$, 0 et 3.

Tableau du signe :

x	$-\infty$	0		$\frac{9}{7}$		3		4	$+\infty$
$x-4$	-		-		-		-	0	$+$
$7x-9$	-		-	0	$+$		$+$		$+$
x	-	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	-		-		-	0	$+$		$+$
$\frac{(x-4)(7x-9)}{6x(x-3)}$	$+$	$\|\|$	-	0	$+$	$\|\|$	-	0	$+$

Donc : $S =]-\infty, 0[\cup [\frac{9}{7}, 3[\cup [4, +\infty[$.

Question 2 — 24 (=8+10+6) points

(1) $1 < a \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{a} \geq \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{a} < 1$ (a)

$$-3 \leq b \leq -2 \Leftrightarrow 3 \geq -b \geq 2$$
$$\Rightarrow 9 \geq b^2 \geq 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4} / .(-2)$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{9} \geq -\frac{2}{b^2} \geq -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{2}{b^2} \leq -\frac{2}{9} \quad \text{(b)}$$

On additionne membre par membre (a) et (b) :

$$-\frac{1}{10} \leq \frac{1}{a} - \frac{2}{b^2} < \frac{7}{9}$$

(2) $1 < a \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2 < a+1 \leq \frac{7}{2}$ (c)

$$1 < a \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2 < 2a \leq 5 \quad \text{(d)}$$

$$-3 \leq b \leq -2 \Leftrightarrow 3 \geq -b \geq 2$$
$$\Leftrightarrow 27 \geq -b^3 \geq 8$$
$$\Leftrightarrow 8 \leq -b^3 \leq 27 \quad \text{(e)}$$

« (d) + (e) » :

$$10 < 2a - b^3 \leq 32$$
$$\Rightarrow \frac{1}{10} > \frac{1}{2a-b^3} \geq \frac{1}{32}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{32} \leq \frac{1}{2a-b^3} < \frac{1}{10} \quad \text{(f)}$$

« (c) x (f) » :

$$\frac{1}{16} < \frac{a+1}{2a-b^3} < \frac{7}{20}\,.$$

$$(3) \quad \begin{cases} 1 < a \leq \dfrac{5}{2} \\ -3 \leq b \leq -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -2 < a+b \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } 0 \leq a+b \leq \frac{1}{2} \text{ alors } 0 \leq (a+b)^2 \leq \frac{1}{4}\ ;$$
$$\text{Si } -2 < a+b \leq 0 \text{ alors } 0 \leq (a+b)^2 < 4\,.$$

Par conséquent :

$$0 \leq (a+b)^2 < 4\,.$$

Question 3

(1) On a la formule : $\overline{BC} = \dfrac{2S}{h}$, où S est l'aire du triangle et h la longueur de la hauteur issue de A. Or :

$$36{,}4 \leq S \leq 36{,}5 \Leftrightarrow 72{,}8 \leq 2S \leq 73$$

et :

$$3{,}1 \leq h \leq 3{,}2 \Leftrightarrow \frac{1}{3{,}2} \leq \frac{1}{h} \leq \frac{1}{3{,}1}$$

Donc, en multipliant membre par membre les 2 inégalités on obtient :

$$\frac{72{,}8}{3{,}2} \leq \frac{S}{h} \leq \frac{73}{3{,}1}\,.$$
$$\Leftrightarrow 22{,}75 \leq \overline{BC} \leq 23{,}55$$

(2) Soit x le nombre de vaches et y le nombre de moutons dans la prairie. Les affirmations des deux garçons sont :

$$60 \leq x+y \leq 80 \text{ et}$$
$$15 \leq x \leq 20 \Leftrightarrow -20 \leq -x \leq -15$$

On additionnant membre par membre les 2 inégalités, il vient :

$$40 \leq y \leq 65\,.$$

Le nombre de moutons est compris entre 40 et 65.