Question 1

(3) Thèse : Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles isocèles de sommets principaux A et A' respectivement. $\Delta(ABC) \sim \Delta(A'B'C') \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}'$.

Démonstration : Comme $\overline{AB} = \overline{AC}$ et $\overline{A'B'} = \overline{A'C'}$ on a déjà :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}},$$

c.-à-d. on a deux côtés respectivement proportionnels. D'après le critère $\tilde{C}A\tilde{C}$, il faut et il suffit que l'angle compris entre les côtés proportionnels soit le même, c.-à-d. que $\hat{A} = \hat{A}'$.

(4) Sur les deux figures on a :

$$ABCD \sim A'BC'D' \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} \qquad (1),$$

c.-à-d. le rapport des longeurs doit être égal au rapport des largeurs. (Les angles formés par deux côtés successifs sont de toute façon égaux puisque ce sont des angles droits pour les deux rectangles.) Or, comme $D'C'//AB$, le théorème de Thalès permet d'affirmer que :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{D'C'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BC}} \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on voit donc que les deux rectangles sont semblables si et seulement si :

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC'} = \overline{CC'} \Leftrightarrow C' = \text{mil}[BC].$$

Or, ceci n'est pas vrai en général (1re figure). C'est le cas si et seulement si $D' = \text{mil}[AC]$, comme sur la 2e figure. En effet, d'après le théorème de Thalès :

$$D'C'//AB \Rightarrow \frac{\overline{BC'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{CD'}}.$$

Question 2

Solution rapide : Comme $FG//AC$ et $DE//BC$, les deux triangles DFG et BAC ont des côtés deux à deux parallèles et sont donc semblables, car homothétiques. Le rapport de la similitude transformant DFG en BAC est égal à 3 car $\overline{BA} = 3\overline{DF}$. Donc :

$$\text{aire}(BAC) = 9 \cdot \text{aire}(DFG) = 9 \cdot 6 = 54\,\text{cm}^2.$$

Finalement, l'aire du polygone cherché est de $54 - 6 = 48$ cm^2.

Question 3

D'après le théorème de Thalès :

1) $EF \,//\, QR \Rightarrow \dfrac{\overline{PE}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{QR}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{EF} = \dfrac{\overline{QR}}{3} = \dfrac{15}{3} = 5$

2) $EF \,//\, QR \Rightarrow \dfrac{\overline{PE}}{\overline{EQ}} = \dfrac{\overline{PF}}{\overline{FR}} = \dfrac{3}{6} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PF}}{8} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{PF} = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4$

3) $EF \,//\, QR \Rightarrow \dfrac{\overline{HE}}{\overline{HR}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{QR}} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{HE}}{9{,}6} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{HE} = 9{,}6 \cdot \dfrac{1}{3} = 3{,}2$

4) $GH \,//\, QR \Rightarrow \dfrac{\overline{GH}}{\overline{QR}} = \dfrac{\overline{EH}}{\overline{ER}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{GH}}{15} = \dfrac{3{,}2}{9{,}6+3{,}2} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \overline{GH} = \dfrac{15}{4} \quad = 3{,}75$

5) $EF \,//\, GH \Rightarrow \dfrac{\overline{QG}}{\overline{QE}} = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{QG}}{6} = \dfrac{3{,}75}{5} \Leftrightarrow \overline{QG} = \dfrac{6 \cdot 3{,}75}{5} = 4{,}5$

Question 4

a) On n'obtiendra certainement pas un parallélogramme car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, ce qui n'est pas le cas ici (p.ex : $\overline{OA} \neq \overline{OC}$.)

b) Par contre : $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{85}{51} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \dfrac{65}{39} = \dfrac{5}{3}$, donc $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$. D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que $ABCD$ est un trapèze avec les bases parallèles $[BC]$ et $[AD]$.

G. Lorang