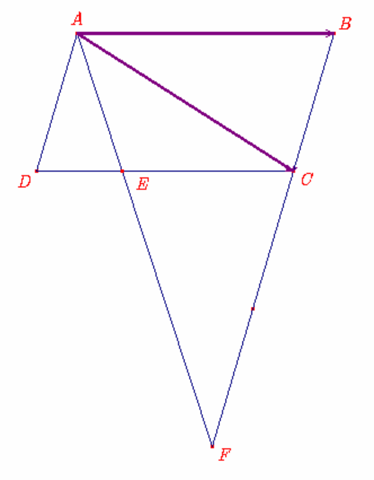
Question 2

(1) $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}$.

(2) On a :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}\\ &= \overrightarrow{AC} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AC} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= -\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ 1\end{pmatrix} \text{ dans } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

D'autre part :

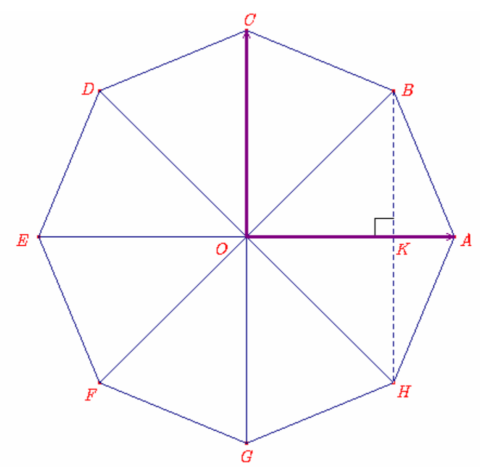
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}\\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC} + 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix} \text{dans } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right).$$

(3) $\det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right) = \begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = -2+2=0$

Donc $\overrightarrow{AE} \mathbin{//} \overrightarrow{AF}$, c.-à-d. A, E et F sont alignés.

Question 3



(1) La base $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ est orthonormée car $\overline{OA} = \overline{OC}$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$.

(2) Dans le triangle OBK, rectangle en K, on a :

$$\sin\hat{O} = \frac{\overline{BK}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin 45° = \frac{\overline{BK}}{1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{BK}$$

et $\cos\hat{O} = \dfrac{\overline{OK}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos 45° = \dfrac{\overline{OK}}{1} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \overline{OK}$.

(3) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OC}$. Donc : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OC}$. Donc : $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}\Rightarrow\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ dans $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

(4) D'après la question précédente : $\overrightarrow{HB}=\sqrt{2}\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{OC}$. Donc $\overrightarrow{HB}//\overrightarrow{GC}$.

La relation de colinéarité est :

$$\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{OC}=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{HB}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}\overrightarrow{HB}=\sqrt{2}\overrightarrow{HB},$$

c.-à-d. : $\overrightarrow{GC}=\sqrt{2}\overrightarrow{HB}$.

(5) O n'est pas le centre de gravité du triangle EBH car :

$$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

Bonus : $\overrightarrow{OL}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}\right)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\\ 0\end{pmatrix}$

G. Lorang