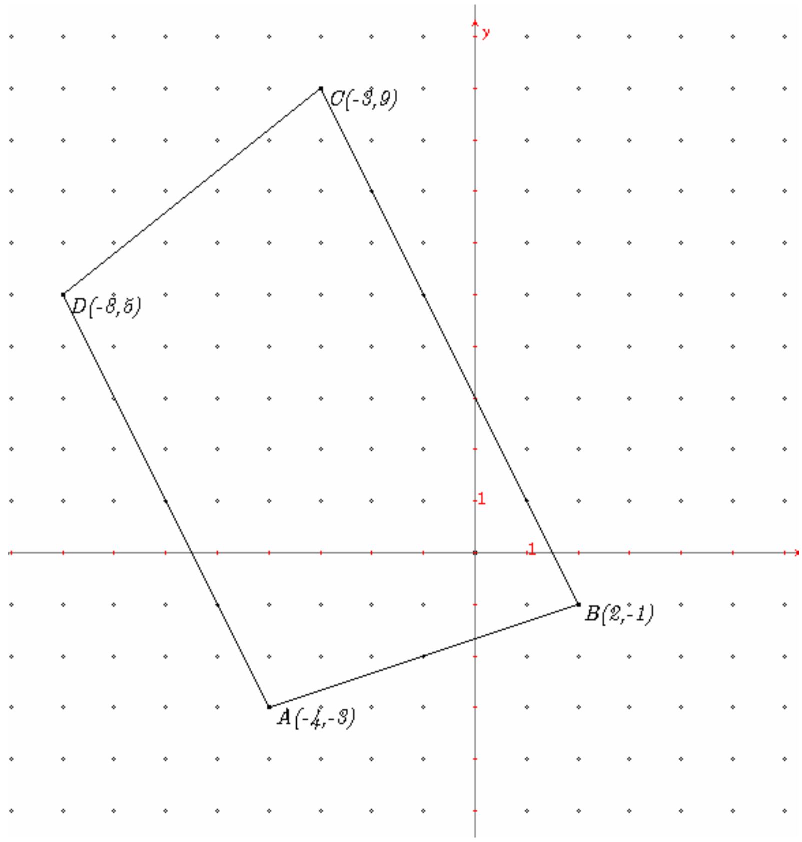
Question 1

(1) Figure :



(2) On a : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont différents et par conséquent $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires car

$$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -5\\8 & 10\end{vmatrix}=-40+40=0$$

Par conséquent, $ABCD$ est un trapèze avec les bases parallèles $[AD]$ et $[BC]$

(3) $AEBC$ est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_E+4\\y_E+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_E=1\\y_E=-13\end{cases}$$

Donc : $E(1,-13)$.

(4) AD // BC d'après la question (2) et AE // BC d'après la question (3), donc AD // AE. Par conséquent, A, E et D sont alignés.

Pour trouver la relation de colinéarité, on travaille aussi avec les coordonnées :

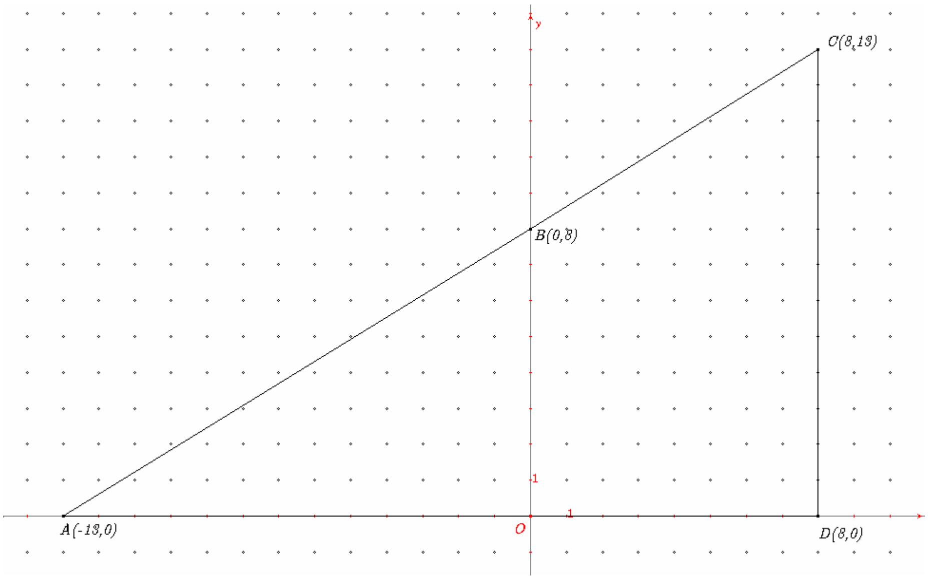
$$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1+8\\-13-5\end{pmatrix} = \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}9\\-18\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\overrightarrow{DA} = \frac{4}{9}\overrightarrow{DE}.$$

Question 2

(1) Figure :



(2) $\text{Aire}(ACD) = \dfrac{\overline{AD}\cdot\overline{DC}}{2} = \dfrac{21\cdot 13}{2} = 136,5$ u.a.

$\text{Aire}(ABO) = \dfrac{\overline{AO}\cdot\overline{OB}}{2} = \dfrac{13\cdot 8}{2} = 52$ u.a.

$\text{Aire}(OBCD) = \dfrac{\overline{OB}+\overline{DC}}{2}\cdot\overline{OD} = \dfrac{8+13}{2}\cdot 8 = 84$ u.a.

Donc : $\text{Aire}(ABO) + \text{Aire}(OBCD) = 52 + 84 = 136 \neq \text{Aire}(ACD)$.

(3) On en déduit que les points A, B et C ne peuvent pas être alignés !

Démontrons-le analytiquement :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}13\\8\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}21\\13\end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix}13 & 21\\ 8 & 13\end{vmatrix} = 169 - 168 = 1 \neq 0.$$

Question 3

(1) $\quad G\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right).$

(2) $\quad H\left(\dfrac{a+b+\dfrac{a+b}{3}}{3}, \dfrac{0+0+\dfrac{c}{3}}{3}\right) = H\left(\dfrac{\dfrac{3a+3b}{3}+\dfrac{a+b}{3}}{3}, \dfrac{c}{9}\right) = H\left(\dfrac{4a+4b}{9}, \dfrac{c}{9}\right).$

(3) $\quad K\left(\dfrac{a+\dfrac{a+b}{3}+0}{3}, \dfrac{0+\dfrac{c}{3}+c}{3}\right) = K\left(\dfrac{\dfrac{3a}{3}+\dfrac{a+b}{3}}{3}, \dfrac{\dfrac{c}{3}+\dfrac{3c}{3}}{3}\right) = K\left(\dfrac{4a+b}{9}, \dfrac{4c}{9}\right).$

(4) $\quad L\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{3}+b+0}{3}, \dfrac{\dfrac{c}{3}+0+c}{3}\right) = L\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{3}+\dfrac{3b}{3}}{3}, \dfrac{\dfrac{c}{3}+\dfrac{3c}{3}}{3}\right) = L\left(\dfrac{a+4b}{9}, \dfrac{4c}{9}\right).$

(5) Soit P le centre de gravité du $\Delta(HKL)$:

$$P\left(\dfrac{\dfrac{4a+4b}{9}+\dfrac{4a+b}{9}+\dfrac{a+4b}{9}}{3}, \dfrac{\dfrac{c}{9}+\dfrac{4c}{9}+\dfrac{4c}{9}}{3}\right) = P\left(\dfrac{\dfrac{9a+9b}{9}}{3}, \dfrac{\dfrac{9c}{9}}{3}\right) = P\left(\dfrac{a+b}{3}, \dfrac{c}{3}\right).$$

Donc : $P = G$. Pour illustrer, voici une figure avec les 4 centres de gravité :