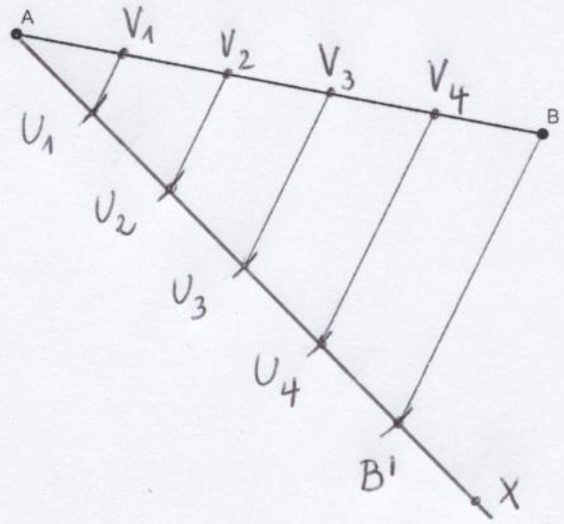
Nom : Correction .... Prénom : ....

4M2 Devoir de mathématiques I,1 20.10.09

Question 1 10 (=4+6) points

Partager le segment $[AB]$ de la figure ci-dessous en 5 segments de même longueur sans utiliser la graduation de votre règle ! Décrire et justifier votre démarche.

a) Construction :

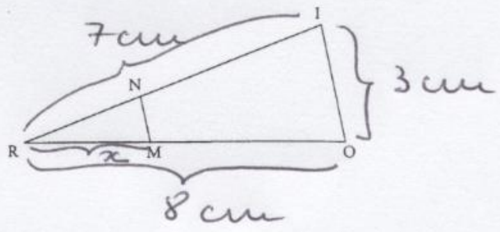


b) Description et justification :

On trace une demi-droite $[AX)$ passant par A. Sur cette demi-droite on construit 5 points régulièrement espacés U_1, U_2, U_3, U_4 et B' à l'aide du compas. On trace ensuite $[BB']$ et les segments parallèles à $[BB']$ passant par U_1, U_2, U_3 et U_4 coupant $[AB]$ en V_1, V_2, V_3 et V_4 respectivement. Les points V_1, V_2, V_3 et V_4 partagent $[AB]$ en 5 segments de même longueur.
En effet, comme $(U_1V_1) \parallel (BB')$ on a d'après le théorème de Thalès : $\frac{AV_1}{AB} = \frac{AU_1}{AB'} = \frac{1}{5}$.
De même : $\frac{AV_2}{AB} = \frac{AU_2}{AB'} = \frac{2}{5}$; $\frac{AV_3}{AB} = \frac{AU_3}{AB'} = \frac{3}{5}$
et $\frac{AV_4}{AB} = \frac{AU_4}{AB'} = \frac{4}{5}$.

Question 2 16 (=6+3+3+4) points

Sur la figure ci-contre, ROI est un triangle tel que $RO = 8$ cm, $RI = 7$ cm et $OI = 3$ cm. Soit M un point de $[RO]$. On trace par M la parallèle à OI qui coupe RI en N. On pose : $RM = x$ avec $0 \leq x \leq 8$.



(1) Exprimer les longueurs RN et MN en fonction de x.

Comme $(MN) // (IO)$, on a d'après le théorème de Thalès dans le ΔRIO :

a) $\frac{RN}{RI} = \frac{RM}{RO}$

$\Leftrightarrow \frac{RN}{7} = \frac{x}{8} \quad / \cdot 7$

$\Leftrightarrow RN = \frac{7x}{8}$ (cm)

b) $\frac{NM}{IO} = \frac{RM}{RO}$

$\Leftrightarrow \frac{NM}{3} = \frac{x}{8} \quad / \cdot 3$

$\Leftrightarrow NM = \frac{3x}{8}$ (cm)

(2) Montrer que le périmètre p_1 du triangle RMN est égal à $\frac{9}{4}x$.

$$p_1 = RM + MN + RN = x + \frac{3x}{8} + \frac{7x}{8} = \frac{18x}{8} = \frac{9x}{4}$$

(3) Montrer que le périmètre p_2 du trapèze $MOIN$ est égal à $18 - \frac{3}{2}x$.

$$p_2 = MO + OI + IN + NM = 8 - x + 3 + 7 - \frac{7x}{8} + \frac{3x}{8} = 18 - \frac{12x}{8} = 18 - \frac{3x}{2}$$

(4) Déterminer x pour que les deux périmètres soient égaux.

$P_1 = P_2$

$\Leftrightarrow \dfrac{9x}{4} = 18 - \dfrac{3x}{2} \quad |\cdot 4$

$\Leftrightarrow 9x = 72 - 6x$

$\Leftrightarrow 15x = 72 \quad |:15$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{72}{15} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$ cm

Question 4 — 8 points

Sur la droite (HS), placer les points définis ci-après, puis calculer les rapports demandés :

a) Le point L est défini par : $L \in [HS]$ et $\dfrac{HL}{HS} = \dfrac{1}{2}$;

Que vaut alors $\dfrac{HL}{LS}$? $\dfrac{HL}{LS} = 1$

b) Le point A est défini par : $A \in [HS]$ et $\dfrac{HA}{AS} = \dfrac{1}{3}$;

Que vaut alors $\dfrac{HA}{HS}$? $\dfrac{HA}{HS} = \dfrac{1}{4}$

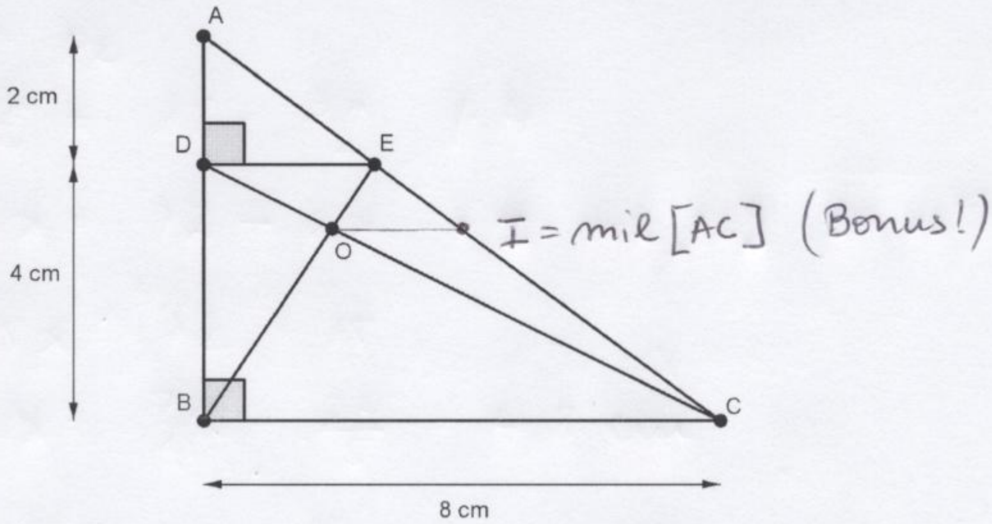
c) Le point E est défini par : $E \in [HS]$ et $\dfrac{EH}{ES} = 2$;

Que vaut alors $\dfrac{HE}{HS}$? $\dfrac{HE}{HS} = \dfrac{2}{3}$

d) Le point T est défini par : $T \notin [HS]$ et $\dfrac{HT}{HS} = \dfrac{1}{6}$;

Que vaut alors $\dfrac{TH}{TS}$? $\dfrac{TH}{TS} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7}$

Question 5 18 (=1+6+3+8) points



(1) En utilisant les données sur la figure, montrer que $(DE)//(BC)$.

(DE) ⊥ (AB) et (BC) ⊥ (AB), donc (DE) // (BC)

(2) Montrer que $\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB}$. Calculer ensuite la valeur de ces deux rapports.

Comme (DE) // (BC), on a d'après le théorème de Thalès dans le Δ ABC :

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ①

Comme (DE) // (BC), on a d'après le théorème de Thalès dans le ⧖ DEBC :

$\frac{OE}{OB} = \frac{DE}{BC}$ ②

D'après ① et ② on a :

$\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3}$ (car AD = 2 et AB = 6)

(3) Sans ***aucune*** justification, indiquer 3 autres rapports égaux à $\frac{AD}{AB}$:

$\frac{AD}{AB} = \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{BC} = \frac{OD}{OC} = \frac{AE}{AC}$

(4) Calculer AC , AE et DE :

Comme le Δ ABC est rectangle en B

on a: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 6^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 100 \quad | \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow AC = 10$ cm

Comme $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ on a

$AE = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{10}{3}$ cm

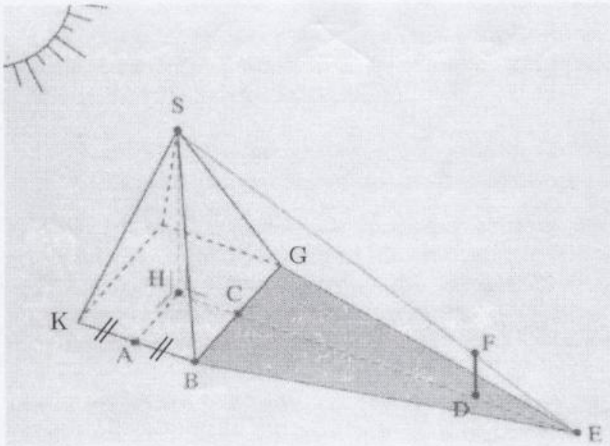
Comme $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ on a:

$DE = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$ cm

Question 4

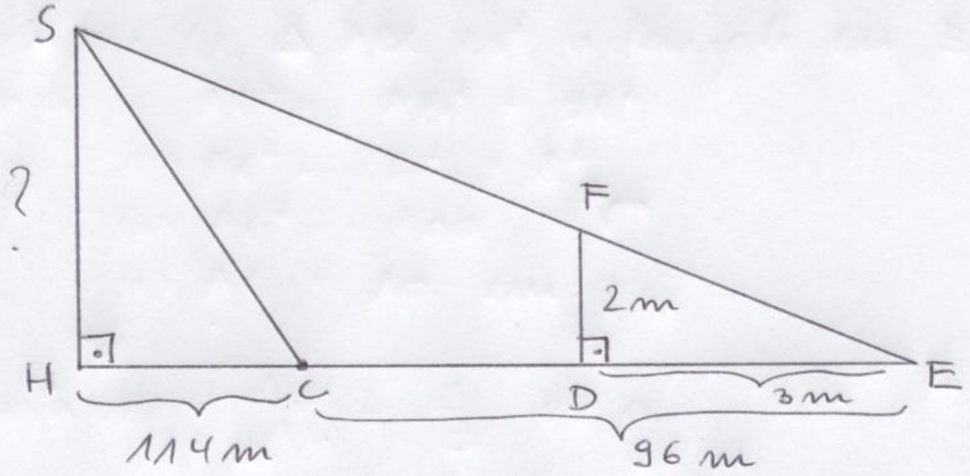
8 (=4+4) points

La figure ci-contre représente la Grande Pyramide de Gizeh et son ombre au soleil. Une légende rapporte qu'on mit au défi le philosophe et mathématicien grec ***Thalès de Milet*** de calculer la hauteur de la pyramide. Pour cela Thalès plaça verticalement un bâton $[DF]$ sur la médiatrice (HE) du côté $[BG]$ de telle manière que l'ombre du bâton se termine en E exactement comme celle de la pyramide.



On donne : $DF = 2$ m, $DE = 3$ m, $CE = 96$ m et $KB = 228$ m.

(1) Faire un ***schéma géométrique*** du triangle SHE :



(2) Calculer la hauteur de la pyramide.

Comme (FD) ⊥ (HE) et (SH) ⊥ (HE) on a : (SH) // (FD). Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{SH}{FD} = \frac{EH}{ED} \iff \frac{SH}{2} = \frac{210}{3}$$

$$\iff SH = 2 \cdot 70 = 140 \text{ m}$$

La hauteur de la pyramide est 140 m

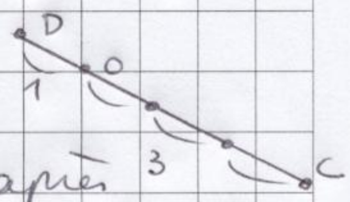
Bonus

4 points

Dans la question 5, soit $I = \text{mil}[AC]$. Est-ce que $(OI)//(DE)$?

$$\frac{CI}{CE} = \frac{CI}{CA} \cdot \frac{CA}{CE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{CO}{CD} = \frac{3}{4} \text{ car } \frac{OD}{OC} = \frac{1}{3}$$



Comme $\frac{CI}{CE} = \frac{CO}{CD}$ on a d'après la réciproque du théorème de Thalès que (OI) // (DE) !

G. Lorang