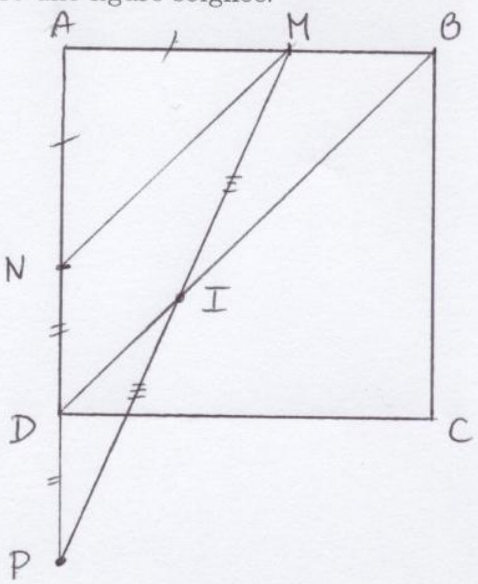
Nom : Corrigé Prénom : ....

4M2 **Devoir de mathématiques I,2** 17.11.09

Question 1 12 (=4+3+3+2) points

Soit un carré $ABCD$ et M un point ***quelconque*** du côté $[AB]$. Soit N le point du segment $[AD]$ tel que $AM = AN$. Soit P le symétrique de N par rapport à D et I le milieu de $[MP]$.

(1) Faire une figure soignée.



(2) Montrer que $(NM)//(DB)$.

Comme $AM = AN$ et $AB = AD$ on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès on a donc : $(NM) // (DB)$

(3) Montrer que $(DI)//(NM)$.

Comme I = mil $[MP]$ et D = mil $[NP]$ on a d'après le théorème des milieux :

$(DI) // (NM)$

(4) Que peut-on conclure d'après (2) et (3) ?

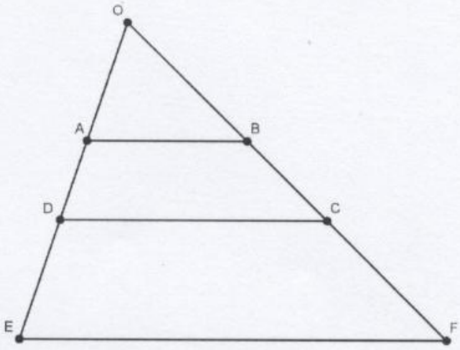
D'après (2) et (3) on conclut que (DI) // (DB), donc que les points D, I et B sont alignés.

Question 2

20 (=8+8+4) points

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, on suppose que $AB // DC // EF$ et on donne dimensions du trapèze $ABCD$:

$AB = 3$;
$BC = 4$;
$CD = 5$;
$DA = 2$.



(1) Déterminer le périmètre du triangle OAB. Quelle est la nature de ce triangle ?

Comme (AB) // (CD) on a d'après le th. de Thalès dans le Δ OCD :

① $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC}$

$\Leftrightarrow \frac{OA}{OA+2} = \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow 5OA = 3OA + 6$

$\Leftrightarrow 2OA = 6$

$\Leftrightarrow OA = 3$

② $\frac{OB}{BC} = \frac{OA}{AD}$

$\Leftrightarrow \frac{OB}{4} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow OB = 6$

Le périmètre du ΔOAB est donc : $3+3+6=12$

C'est un triangle isocèle car $OA = AB = 3$.

(2) Sachant que $DE = \frac{10}{3}$, déterminer le périmètre du trapèze $CDEF$.

D'après le théorème de Thalès dans le trapèze ABFE, on a :

$$\frac{CF}{BC} = \frac{DE}{AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{CF}{4} = \frac{10/3}{2} \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow CF = \frac{20}{3}$$

D'après le th. de Thalès dans le Δ OEF :

$$\frac{OD}{OE} = \frac{DC}{EF}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{25/3} = \frac{5}{EF}$$

$$\Leftrightarrow EF = \frac{25}{3}$$

Le périmètre du trapèze CDEF est :

$$5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{3} + \frac{25}{3} = \frac{70}{3}$$

(3) Est-ce que $(BD)//(EC)$?

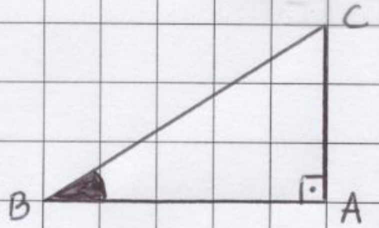
$$\begin{cases} \frac{OD}{OE} = \frac{5}{25/3} = 5 \cdot \frac{3}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \\ \frac{OB}{OC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Comme $\frac{OD}{OE} = \frac{OB}{OC}$, on a d'après la réciproque du théorème de Thalès :

$$(BD) // (EC)$$

Question 3 7 points

Enoncer et démontrer la ***relation fondamentale*** de la trigonométrie.



Soit $\hat{B}$ un angle aigu.
Alors $\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1$

Démonstration :

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en A :

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad | : BC^2$

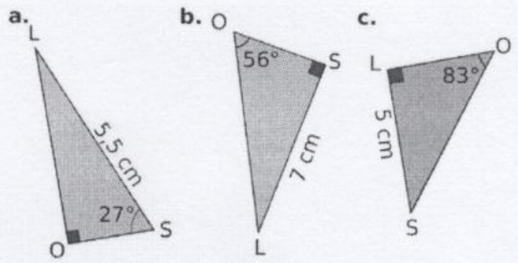
$\Leftrightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos \hat{B})^2 + (\sin \hat{B})^2 = 1$

C.Q.F.D

Question 4 21 (=10+4+7) points

(1) Dans chaque cas, calculer une valeur approchée au 10ᵉ de millimètre près de la longueur SO :



a) $\cos \hat{S} = \frac{SO}{SL}$

$\Leftrightarrow \cos 27° = \frac{SO}{5,5}$

$\Leftrightarrow SO = 5,5 \cdot \cos 27°$

$\Leftrightarrow SO \simeq 4,90 \text{ cm}$

b) $\tan 56° = \frac{SL}{SO}$

$\Leftrightarrow \tan 56° = \frac{7}{SO}$

$\Leftrightarrow SO = \frac{7}{\tan 56°}$

$\simeq 4,72 \text{ cm}$

c) $\sin \hat{O} = \frac{SL}{SO}$

$\Leftrightarrow \sin 83° = \frac{5}{SO}$

$\Leftrightarrow SO = \frac{5}{\sin 83°}$

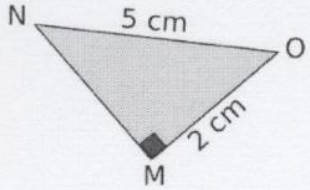
$\simeq 5,04 \text{ cm}$

Nom : .... Prénom : ....

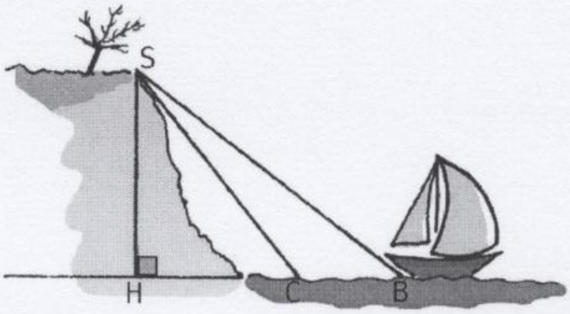
(2) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près des angles $\widehat{N}$ et $\widehat{O}$:

$\hat{N} = \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 23{,}58°$

$\hat{O} = 90° - \hat{N} \simeq 66{,}42°$



(3) Charles navigue le long d'une falaise. Pour des questions de sécurité, il ne doit pas aller au delà du point C. Il a jeté l'ancre au point B. On donne :
$SH = 100$ m, $\widehat{HCS} = 75°$ et $\widehat{HBS} = 65°$.



A quelle distance (au dm près) du point C le bateau de Charles se trouve-t-il ?

$\tan \widehat{HCS} = \frac{SH}{CH}$

$\Leftrightarrow CH = \frac{SH}{\tan \widehat{HCS}}$

$\Leftrightarrow CH = \frac{100}{\tan 75°} \simeq 26{,}79$ m

De même :

$BH = \frac{100}{\tan 65°} \simeq 46{,}63$ m

Distance $BC = BH - CH$

$\simeq 19{,}8$ m

G. Lorang