Corrigé

4M2 Devoir de mathématiques I,3 8.12.09

Question 1

20 (=6+8+6) points

(1) Enoncer et démontrer la formule qui donne $\cos^2 x$ en fonction de $\tan^2 x$:

voir cahier.

(2) Compléter, puis démontrer les formules suivantes par un raisonnement géométrique :

$\cos 60° = \ldots\ldots\ldots$, $\sin 60° = \ldots\ldots\ldots$, $\tan 60° = \ldots\ldots\ldots$, $\cot 60° = \ldots\ldots\ldots$

voir cahier

(3) Soit x un angle aigu tel que $\tan x = \frac{5}{12}$. Sans calculer x avec la calculatrice, déterminer les valeurs exactes de $\cot x$, $\cos x$ et $\sin x$.

a) $\cot x = \frac{12}{5}$

b) $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\frac{25}{144}}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\frac{169}{144}}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{144}{169}$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{12}{13}$

c) $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{\frac{25}{144}}{1+\frac{25}{144}}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{\frac{25}{144}}{\frac{169}{144}}$

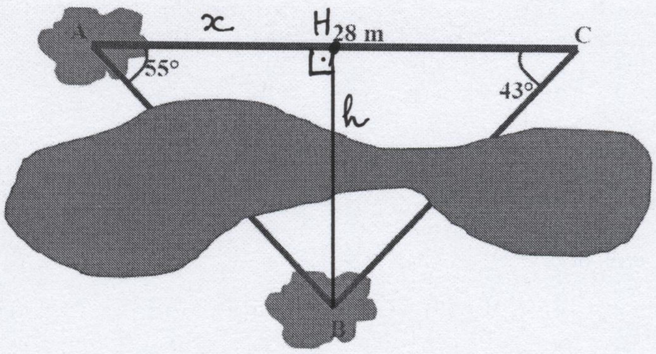
$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{25}{169}$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{5}{13}$

Question 2

17 (=2+12+3) points

Un géomètre veut calculer la distance entre deux arbres A et B, séparés par un étang. Pour cela il se place en un point C situé à 28 m de A, d'où il peut voir les deux arbres. Depuis C, il mesure $\widehat{ACB} = 43°$ avec son théodolite[1]. Ensuite, depuis A, il mesure $\widehat{CAB} = 55°$.



(1) Expliquer pourquoi il est impossible d'utiliser les formules trigonométriques dans le triangle ABC.

Le triangle ABC n'est pas rectangle!
En effet, l'angle $\hat{B}$ mesure $180 - 55 - 43$
$= 82°$

[1] Appareil servant à mesurer les angles.

(2) Voilà pourquoi, le géomètre trace sur son plan la hauteur issue de B du triangle ABC. Elle coupe le segment $[AC]$ en H. On note $AH = x$ et $BH = h$. Calculer x et h à 0,01 m près.

Dans le Δ AHB : $\tan 55° = \dfrac{h}{x} \iff h = x \cdot \tan 55°$

Dans le Δ CHB : $\tan 43° = \dfrac{h}{28-x} \iff h = (x-28) \cdot \tan 43°$

D'où le système : $\begin{cases} h = x \cdot \tan 55° \\ h = (28-x) \cdot \tan 43° \end{cases}$

On en déduit que :

$$x \cdot \tan 55° = (28-x) \cdot \tan 43°$$
$$\iff x \cdot \tan 55° = 28 \cdot \tan 43° - x \cdot \tan 43°$$
$$\iff x \cdot \tan 55° + x \cdot \tan 43° = 28 \cdot \tan 43°$$
$$\iff x\,(\tan 55° + \tan 43°) = 28 \cdot \tan 43°$$
$$\iff x = \frac{28 \cdot \tan 43°}{\tan 55° + \tan 43°} \simeq 11{,}06 \text{ m}$$

Finalement : $h = \dfrac{28 \cdot \tan 43° \cdot \tan 55°}{\tan 55° + \tan 43°} \simeq 15{,}80$ m

(3) Déterminer finalement la distance AB à 0,01 m près.

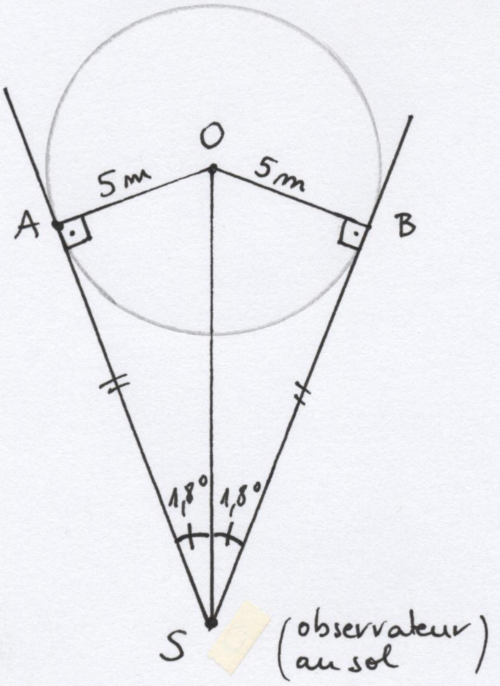
$\cos 55° = \dfrac{x}{AB}$ (dans le Δ ABH)

$\iff AB = \dfrac{x}{\cos 55°} \simeq 19{,}28$ m

Question 3 — 8 (=4+4) points

Un ballon de 10 mètres de diamètre est observé à la verticale sous un angle de 3,6°. Déterminer la hauteur à laquelle se trouve le centre du ballon.

a) Esquisse :



b) Calculs :

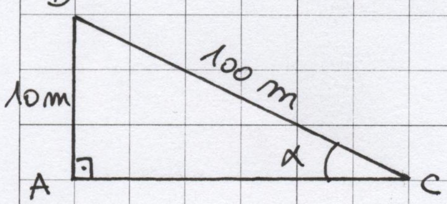
Le Δ SAB est isocèle puisque (SO) est un axe de symétrie de la figure. (SO) est donc aussi la bissectrice de $\widehat{ASB}$.
Dans le Δ AOS, rectangle en A (puisque (SA) est une tangente au cercle) :

$$\sin 1{,}8° = \frac{5}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \quad SO = \frac{5}{\sin 1{,}8°} \simeq 159{,}2 \text{ m}$$

Question 4 — 5 points

Le panneau routier ci-contre indique une descente dangereuse. Sa signification mathématique est la suivante : Une voiture qui parcourt une distance de 100 m sur la route, perd 10 m (c.-à-d. 10% de 100 m) en altitude. Déterminer l'angle que la route fait avec l'horizontale.

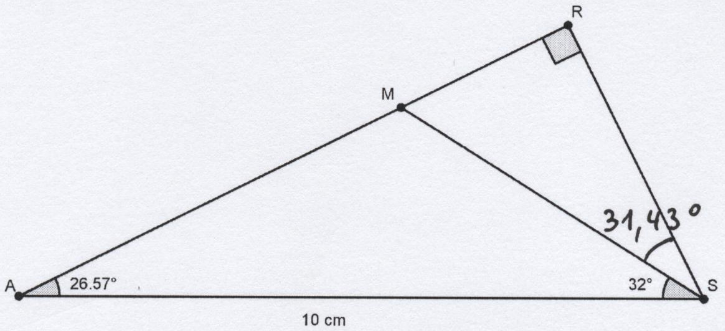


Dans le Δ ABC :

$$\sin \alpha = \frac{10}{100} = 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}(0{,}1) \simeq 5{,}74°$$

Question 5 **10 points**



En utilisant les données sur la figure, calculer le périmètre du triangle *MRS*.

a) $\widehat{ASR} = 90° - 26{,}57° = 63{,}43°$

b) $\widehat{MSR} = \widehat{ASR} - 32° = 31{,}43°$

c) Dans le Δ ARS :

$$\sin 26{,}57° = \frac{RS}{10}$$

$\Leftrightarrow$ $RS = 10 \cdot \sin 26{,}57° \simeq \underline{4{,}47 \text{ cm}}$

d) Dans le Δ MRS :

- $\cos 31{,}43° = \dfrac{RS}{MS}$

$\Leftrightarrow$ $MS = \dfrac{10 \cdot \sin 26{,}57°}{\cos 31{,}43°} \simeq \underline{5{,}24 \text{ cm}}$

- $\tan 31{,}43° = \dfrac{MR}{RS}$

$\Leftrightarrow$ $MR = RS \cdot \tan 31{,}43° = 10 \cdot \sin 26{,}57° \cdot \tan 31{,}43°$

$\Leftrightarrow$ $MR \simeq \underline{2{,}73 \text{ cm}}$

e) Périmètre du Δ MRS :

$RS + MR + MS \simeq 12{,}4 \text{ cm}$

G. Lorang