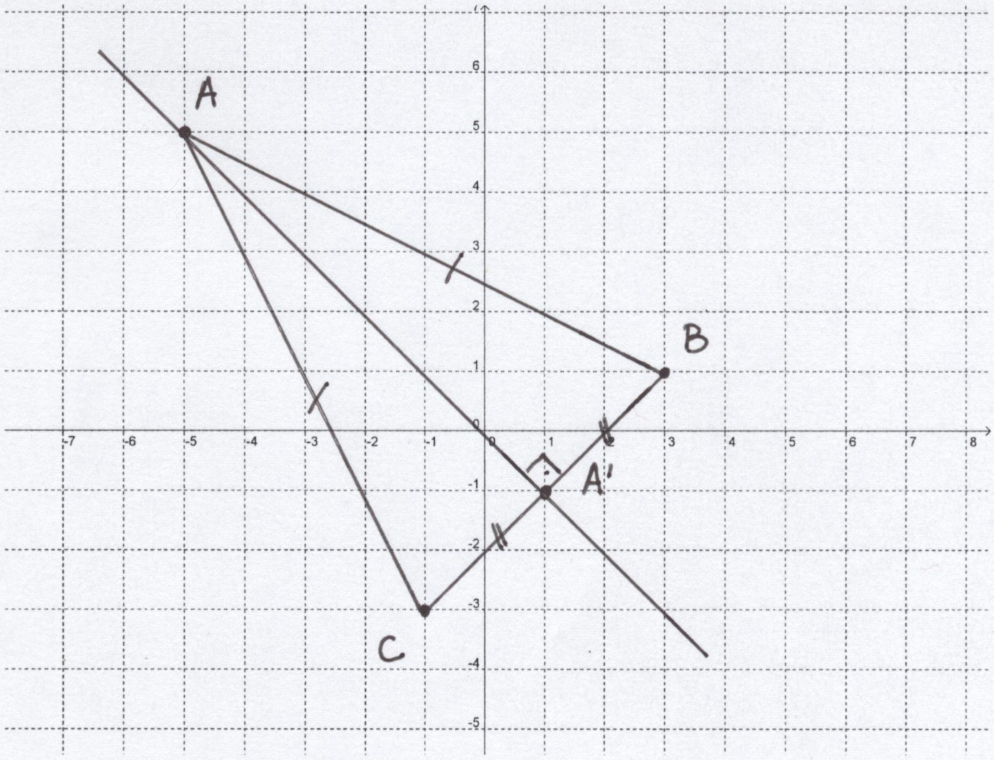
Nom : Corrigé   Prénom :

4M2 Devoir de mathématiques II,2 16.03.2010

Question 1

17 (=2+7+2+3+3) points

(1) Placer les points $A(-5,5)$, $B(3,1)$ et $C(-1,-3)$ dans le repère orthonormé ci-dessous.



(2) Calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC. En déduire la nature de ce triangle.

$AB = \sqrt{(3+5)^2+(1-5)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(-1+5)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-1-3)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Comme $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle de sommet A

(3) a) Déterminer les coordonnées de $A' = \text{mil}[BC]$.

$A'\left(\frac{3-1}{2} ; \frac{1-3}{2}\right) = A'(1,-1)$

b) Compléter la phrase : (AA') est la médiatrice de $[BC]$.

(4) Calculer l'aire du triangle ABC.

$AA' = \sqrt{(1+5)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

aire $\Delta ABC = \dfrac{BC \cdot AA'}{2} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2}$

$= 24$ u.a.

(5) Déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,01° près.

Le $\Delta ABA'$ est rectangle en A'

$\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AA'}{AB} = \dfrac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) \simeq 71{,}57°$

Question 2

10 (=4+4+2) points

Soient les points $A(-4,1)$, $B(12,-3)$ et $C(24,-6)$ dans un repère cartésien du plan.

(1) Est-ce que A, B et C sont alignés ?

A, B, C sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 16\cdot(-3) - 12\cdot(-4) = 0$

$\Leftrightarrow -48 + 48 = 0$

VRAI !

Donc A, B et C sont alignés.

(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$M(x,y) \in (AB)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 16 \\ y-1 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -4(x+4) - 16(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x \cancel{-16} - 16y \cancel{+16} = 0$

$\Leftrightarrow -4x - 16y = 0 \quad | : (-4)$

$\Leftrightarrow x + 4y = 0$

Donc : $(AB) \equiv x + 4y = 0$

(3) Les points $O(0,0)$ et $D(21,-5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?

$O \in (AB) \iff 0 + 4 \cdot 0 = 0$ VRAI !

Donc $O \in (AB)$

$D \in (AB) \iff 21 + 4 \cdot (-5) = 0$ FAUX !

Donc $D \notin (AB)$

Question 3 — 10 (=1+2+2+6) points

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $P(-1,4)$ et $Q(5,-4)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[PQ]$.

(1) Déterminer les coordonnées du centre W du cercle $\mathcal{C}$.

$W =$ mil $[PQ]$, donc $W(2,0)$

(2) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

rayon $= WP = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-0)^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

(3) Montrer que $R(-2,+3) \in \mathcal{C}$.

$WR = \sqrt{(-2-2)^2 + (+3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Donc $WR =$ rayon de $\mathcal{C}$, c-à-d $R \in \mathcal{C}$

(4) a) En raisonnant géométriquement, quelle est la nature du triangle PQR ?

Le ΔPQR est inscrit dans le cercle de diamètre $[PQ]$. Il est donc rectangle en R.

b) Vérifier l'affirmation précédente par un calcul !

$\overrightarrow{RP}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{RQ}\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}$

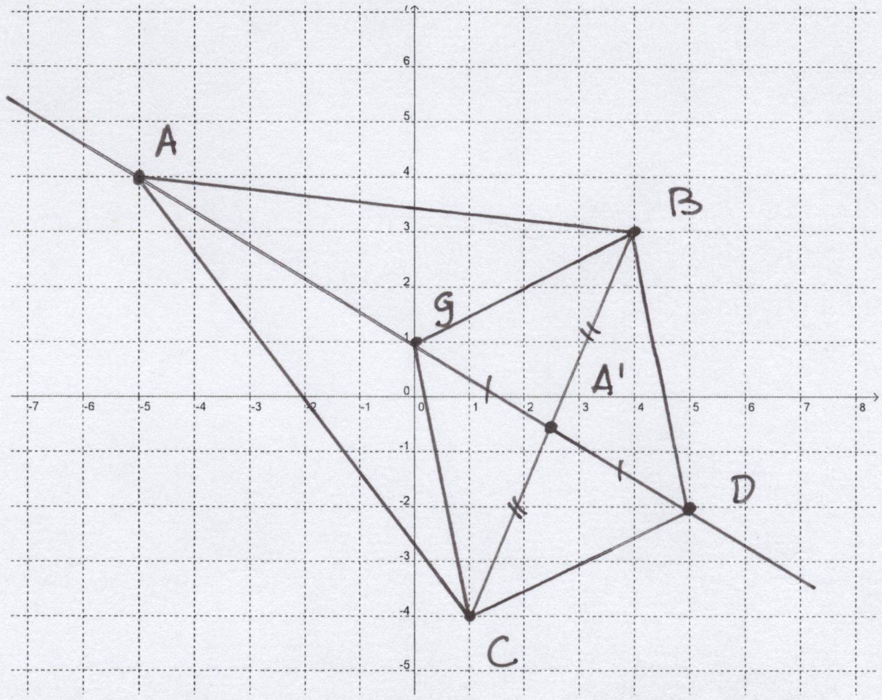
$\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ} \iff 1 \cdot 7 + 1 \cdot (-7) = 0$

$\iff 7 - 7 = 0$ VRAI !

Donc ΔPQR est rectangle en R.

Question 4 11 (=2+1+1+5+2) points

(1) Placer les points $A(-5,4)$, $B(4,3)$ et $C(1,-4)$ dans le repère orthonormé ci-dessous.



(2) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

$$G\left(\frac{-5+4+1}{3} ; \frac{4+3-4}{3}\right) = G(0,1)$$

(3) Déterminer les coordonnées du milieu A' de $[BC]$.

$$A'\left(\frac{4+1}{2} ; \frac{3-4}{2}\right) = A'\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$$

(4) Déterminer les coordonnées du symétrique D de G par rapport à A'.

$$s_{A'}(G) = D \Leftrightarrow A' = \text{mil}[GD]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{0+x_D}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{1+y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -2 \end{cases}$$

Donc $D(5,-2)$

(5) Quelle est la nature du quadrilatère $GBDC$? Justifier !

Comme $A' = \text{mil}[GD]$ et $A' = \text{mil}[BC]$, le quadrilatère $GBDC$ est un #.

Question 5 — 12 (=6+6) points

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(-1,4)$, $B(3,7)$ et $C(2,-5)$. Soit K le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{BK}-4\overrightarrow{KC}=\vec{0}\,.$$

(1) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{BK}-4\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})-4(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AK}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

(2) En déduire les coordonnées du point K.

$$\overrightarrow{AK}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K+1 \\ y_K-4 \end{pmatrix}=\frac{2}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}+\frac{4}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K+1=\frac{8}{7}+\frac{12}{7} \\ y_K-4=\frac{6}{7}-\frac{36}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K=\frac{13}{7} \\ y_K=-\frac{2}{7} \end{cases}$$

Donc $K\left(\frac{13}{7}\,;-\frac{2}{7}\right)$

G. Lorang