Nom : Corrigé Prénom :

4M2 — **Devoir de mathématiques III,2**

Question 1

16 (=4+6+6) points

Factoriser les expressions suivantes ***autant que possible*** :

(1) $a^2 - 4a + 8x - 4x^2$

$= a^2 - 4x^2 - (4a - 8x)$

$= (a-2x)(a+2x) - 4(a-2x)$

$= (a-2x)(a+2x-4)$

(2) $x^2(1-3y) + 2x(6y-2) + (4-12y)$

$= x^2(1-3y) + 4x(3y-1) + 4(1-3y)$

$= x^2(1-3y) - 4x(1-3y) + 4(1-3y)$

$= (1-3y)(x^2-4x+4)$

$= (1-3y)(x-2)^2$

(3) $4a^2 - x^2 + 121b^2 - 9z^2 + 6xz + 44ab$

$= 4a^2 + 44ab + 121b^2 - (x^2 - 6xz + 9z^2)$

$= (2a+11b)^2 - (x-3z)^2$

$= (2a+11b-x+3z)(2a+11b+x-3z)$

Question 2 — 10 points

Effectuer, réduire et ordonner le polynôme $p(x) = 2x^3 - (x-3)^2(2x-1) - 5$ suivant les puissances décroissantes de x. Quel est son degré ? Calculer $p\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$p(x) = 2x^3 - (x^2 - 6x + 9)(2x-1) - 5$$
$$= 2x^3 - (2x^3 - 12x^2 + 18x - x^2 + 6x - 9) - 5$$
$$= \cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 12x^2 - 18x + x^2 - 6x + 9 - 5$$
$$= 13x^2 - 24x + 4$$

$$d^\circ p = 2$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 13\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 24\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$$
$$= \frac{13}{4} + 12 + 4$$
$$= \frac{13}{4} + 16$$
$$= \frac{77}{4}$$

Question 3 — 9 points

Evaluer le polynôme $q(x) = x^3 - 4x + 1$ en $x = 3 - \sqrt{2}$ de deux manières différentes !

$$q(3-\sqrt{2}) = (3-\sqrt{2})^3 - 4(3-\sqrt{2}) + 1$$
$$= (3-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})^2 - 12 + 4\sqrt{2} + 1$$
$$= (3-\sqrt{2})(9 - 6\sqrt{2} + 2) - 12 + 4\sqrt{2} + 1$$
$$= (3-\sqrt{2})(11 - 6\sqrt{2}) - 11 + 4\sqrt{2}$$
$$= 33 - 18\sqrt{2} - 11\sqrt{2} + 12 - 11 + 4\sqrt{2}$$
$$= 34 - 25\sqrt{2}$$

ou mieux

	1	0	-4	1
$3-\sqrt{2}$		$3-\sqrt{2}$	$11-6\sqrt{2}$	$33-25\sqrt{2}$
	1	$3-\sqrt{2}$	$7-6\sqrt{2}$	$34-25\sqrt{2}$

Donc $q(3-\sqrt{2}) = 34 - 25\sqrt{2}$

Calcul : $(3-\sqrt{2})(7-6\sqrt{2})$

$= 21 - 18\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 12$

$= 33 - 25\sqrt{2}$

Question 4

12 (=10+2) points

(1) Déterminer les racines des polynômes suivants :

- $a(x) = 25x^2 - 20x + 4$
- $b(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

(2) Quelles sont les racines du polynôme $p(x) = a(x) \cdot b(x)$?

(1) $a(x) = 25x^2 - 20x + 4$

$= (5x-2)^2$

Donc $a(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$

$b(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

$= (4x^3 - 4x^2) - (9x - 9)$

$= 4x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(4x^2 - 9)$

$= (x-1)(2x-3)(2x+3)$

Donc $b(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

(2) $p(x) = 0 \Leftrightarrow a(x) = 0$ ou $b(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

Question 5 | 13 (=5+8) points

(1) Effectuer la division euclidienne de $a(x) = 2x^4 - x^3 + 4x - 1$ par $b(x) = x^2 - 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 4x - 1 & x^2 - 1 \\
\hline
-2x^4 + 2x^2 & 2x^2 - x + 2 \\
\quad - x^3 + 2x^2 + 4x - 1 & \\
\quad + x^3 \qquad\quad - x & \\
\qquad 2x^2 + 3x - 1 & \\
\qquad -2x^2 \qquad + 2 & \\
\qquad\qquad 3x + 1 &
\end{array}
$$

Donc $2x^4 - x^3 + 4x - 1 = (x^2-1)(2x^2 - x + 2) + 3x + 1$

(2) Montrer comment on peut obtenir ce résultat en utilisant uniquement des schémas de Horner.

$b(x) = (x-1)\cdot(x+1)$

On divise $a(x)$ par $(x-1)$, puis le quotient dans cette division par $x+1$

	2	-1	0	4	-1
1		2	1	1	5
	2	1	1	5	4

$\Rightarrow a(x) = (x-1)\cdot(2x^3 + x^2 + x + 5) + 4$ ①

	2	1	1	5
-1		-2	1	-2
	2	-1	2	3

$\Rightarrow 2x^3 + x^2 + x + 5 = (x+1)(2x^2 - x + 2) + 3$ ②

② dans ① : $a(x) = (x-1)\left[(x+1)(2x^2-x+2) + 3\right] + 4$

$= (x-1)(x+1)(2x^2 - x + 2) + 3(x-1) + 4$

$= (x-1)(x+1)(2x^2 - x + 2) + 3x + 1$

G. Lorang