Corrigé



## Question 1

20 (=14+6) points

(1) Simplifier la fraction rationnelle

$$R(x) = \frac{4x^3 + 4x^2 - 7x + 2}{4x^3 + 8x^2 - x - 2} = \frac{n(x)}{d(x)}$$

après en avoir déterminé les conditions d'existence. (***Aide*** : le dénominateur se factorise à l'aide de la méthode du groupement de termes !)

C.E : $4x^3 + 8x^2 - x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 4x^2(x+2) - (x+2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(4x^2-1) \neq 0$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \pm \frac{1}{2}\}$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x-1)(2x+1) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

Factorisons le numérateur $n(x)$.

$Div(2) = \{\pm 1 ; \pm 2\}$

$n(-2) = 4\cdot(-8) + 4\cdot 4 + 14 + 2 = -32 + 16 + 16 = 0$

Donc $n(x)$ est divisible par $x+2$.

| | 4 | 4 | −7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| −2 | | −8 | 8 | −2 |
| | 4 | −4 | 1 | 0 |

$\Rightarrow n(x) = (x+2)(4x^2 - 4x + 1)$

$= (x+2)(2x-1)^2$

Simplification :

$(\forall x \in D) \quad R(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(2x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(2x-1)}(2x+1)}$

$= \frac{2x-1}{2x+1}$

(2) Calculer : $R(\frac{1}{2})$, $R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $R(-2)$ et $R(0)$.

- $R(\frac{1}{2})$ n'existe pas !
- $R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{2}{\sqrt{2}} + 1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

  $= \dfrac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{1} = 3-2\sqrt{2}$
- $R(-2)$ n'existe pas ! $(-2 \notin D)$
- $R(0) = \dfrac{-1}{+1} = -1$

## Question 2

16 (=12+4) points

(1) Résoudre les équations :

a) $x^3 + x^2 = 5x + 5$

b) $2x^2 = x + 21$

a) $x^3 + x^2 = 5x + 5$

$\Leftrightarrow x^2(x+1) = 5(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 5(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x^2 = 5$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \sqrt{5}$

ou $x = -\sqrt{5}$

$S = \{-1 ; \pm\sqrt{5}\}$

b) $2x^2 = x + 21$

$\Leftrightarrow \underbrace{2x^2 - x - 21}_{p(x)} = 0$

$Div(-21) = \{\pm 1 ; \pm 3 ; \pm 7\}$

$p(1) \neq 0 ; p(-1) \neq 0 ;$

$p(3) \neq 0 ;$

$p(-3) = 18 + 3 - 21 = 0$

Donc $p(x)$ est divisible par $x+3$.

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 2 & -1 & -21 \\
\hline
-3 & & -6 & 21 \\
\hline
 & 2 & -7 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow p(x) = (x+3)(2x-7)$

Donc $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 7/2$

$S = \{-3 ; 7/2\}$

(2) Soit $P(x) = 4x^2 - 2$. Déterminer les réels $x$ tels que $P(x) = 7$.

$P(x) = 7 \iff 4x^2 - 2 = 7$

$\iff 4x^2 = 9$

$\iff x^2 = 9/4$

$\iff x = 3/2$ ou $x = -3/2$

$S = \{\pm 3/2\}$

## Question 3

12 (=4+8) points

(1) Déterminer le paramètre réel $m$ tel que le polynôme $A(x) = mx^2 - (2m+1)x + 3$ soit divisible par $x+3$.

(2) Après avoir remplacé $m$ par la valeur trouvée, déterminer les racines de $A(x)$.

(1) $A(x)$ est divisible par $x+3$

$\iff A(-3) = 0$

$\iff m \cdot (-3)^2 - (2m+1)(-3) + 3 = 0$

$\iff 9m + 6m + 3 + 3 = 0$

$\iff 15m + 6 = 0$

$\iff m = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

(2) $m = -\frac{2}{5} \Rightarrow A(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \left(-\frac{4}{5} + 1\right)x + 3$

$= -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 3$

| | $-2/5$ | $-\frac{1}{5}$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $-3$ | | $\frac{6}{5}$ | $-3$ |
| | $-2/5$ | $1$ | $0$ |

$\Rightarrow A(x) = (x+3)\left(-\frac{2}{5}x + 1\right)$

Donc : $A(x) = 0$

$\iff x + 3 = 0$ ou $-\frac{2}{5}x + 1 = 0$

$\iff x = -3$ ou $-\frac{2}{5}x = -1$

$\iff x = -3$ ou $x = \frac{5}{2}$

racines

## Question 4

**12 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x-3}{18} \leq \dfrac{3x+1}{5} - \dfrac{7(1-x)}{30} & ① \\ \dfrac{x}{7} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{4x-2}{3}\right) > 0 & ② \end{cases}$$

① $\Leftrightarrow \dfrac{90}{90} - \dfrac{5x-15}{90} \leq \dfrac{54x+18}{90} - \dfrac{21-21x}{90} \quad |\cdot 90$

$\Leftrightarrow 90 - 5x + 15 \leq 54x + 18 - 21 + 21x$

$\Leftrightarrow 105 - 5x \leq 75x - 3$

$\Leftrightarrow 108 \leq 80x$

$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{108}{80} = \dfrac{27}{20}$

$S_1 = \left[\dfrac{27}{20} ; +\infty\right[$

② $\Leftrightarrow \dfrac{x}{7} - \dfrac{3}{8} + \dfrac{4x-2}{6} > 0$

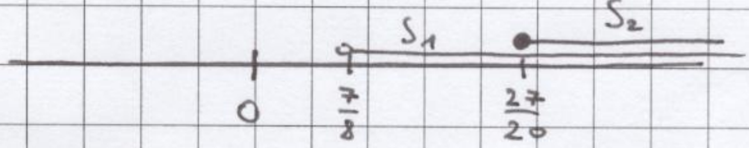
$\Leftrightarrow \dfrac{24x}{168} - \dfrac{63}{168} + \dfrac{112x-56}{168} > 0 \quad |\cdot 168$

$\Leftrightarrow 24x - 63 + 112x - 56 > 0$

$\Leftrightarrow 136x > 119$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{119}{136} = \dfrac{7}{8}$

$S_2 = \left]\dfrac{7}{8} ; +\infty\right[$




$S = S_1 \cap S_2 = \left[\dfrac{27}{20} ; +\infty\right[$

G. Lorang