

Durée : 60' - Calculatrice autorisée

Question 1

14 (=5+4+4+1) points

(1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $r, s \in \mathbb{R}_+$ et $u, v \in \mathbb{R}_-$. Compléter par $\leq, \geq, <$ ou $>$:

- Si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$
- Si $a > b$ alors $a - r > b - r$
- Si $u \geq v$ alors $ru \geq rv$
- Si $a \leq b$ alors $-2au \leq -2bu$
- Si $a \geq b$ alors $au - 3 \leq bu - 3$
- Si $u < v$ alors $u^2 > v^2$
- Si $r < s$ alors $u\sqrt{r} > u\sqrt{s}$
- Si $r < s$ et $u < v$ alors $us < rv$

(2) Voir cours.

(3) Voir cours.

(4) Voir cours.

$$\begin{aligned}
 & r < s \text{ et } -u > -v \\
 & \quad \quad \quad -v < -u \\
 \Rightarrow & -rv < -us \\
 \Leftrightarrow & rv > us \\
 \Leftrightarrow & us < rv
 \end{aligned}$$

Question 2

12 points

$$\begin{aligned}
 (1) \Leftrightarrow & \frac{2y+2}{6} - \frac{y+7}{6} < \frac{3}{6} \\
 \Leftrightarrow & 2y+2-y-7 < 3 \\
 \Leftrightarrow & y-5 < 3 \\
 \Leftrightarrow & y < 8 \\
 S_1 = &]-\infty, 8[
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \Leftrightarrow & \frac{3}{8} + y - \frac{5}{3} \geq \frac{-2y}{3} + \frac{3}{8} \\
 \Leftrightarrow & y + \frac{2y}{3} \geq \frac{5}{3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{5y}{3} \geq \frac{5}{3} \\
 \Leftrightarrow & y \geq 1 \\
 S_2 = & [1, +\infty[
 \end{aligned}$$

$$S = S_1 \cap S_2 = [1, 8[$$

Question 3

18 points

Sachant que $\frac{2}{3} < a \leq 1$ et $-2 \leq b \leq -\frac{1}{2}$, donner un encadrement de :

- a) $3ab$ b) $\frac{a+1}{2b}$ c) $\sqrt{9a-2b+3}$ d) $3 - \frac{4}{b^2}$

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{2}{3} < a \leq 1 \quad | \cdot 3 & \quad \quad & -2 \leq b \leq -\frac{1}{2} \quad | \cdot (-1) \\
 \Leftrightarrow & \boxed{2 < 3a \leq 3} \quad (1) & \quad \quad & \Leftrightarrow 2 \geq -b \geq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \cdot (2) : & 1 < -3ab \leq 6 \quad | \cdot (-1) & \Leftrightarrow & \boxed{\frac{1}{2} \leq -b \leq 2} \quad (2) \\
 & -1 > 3ab \geq -6 & & \\
 & \boxed{-6 \leq 3ab < -1} & &
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \boxed{\frac{5}{3} < a+1 \leq 2} \quad (3)$$

$$-4 \leq 2b \leq -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$4 \geq -2b \geq 1$$

$$\boxed{1 \leq -2b \leq 4} \quad (4)$$

$$(3) : (4) : \quad \frac{5}{3} < \frac{a+1}{-2b} \leq \frac{2}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{12} < -\frac{a+1}{2b} \leq 2 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{12} > \frac{a+1}{2b} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-2 \leq \frac{a+1}{2b} < -\frac{5}{12}}$$

$$c) \quad \boxed{6 < 9a \leq 9} \quad (5)$$

$$\boxed{1 \leq -2b \leq 4} \quad (4) \quad (\text{voir } b))$$

$$(5) + (4) : \quad 7 < 9a - 2b \leq 13 \quad | +3$$

$$10 < 9a - 2b + 3 \leq 16 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\boxed{\sqrt{10} < \sqrt{9a - 2b + 3} \leq 4}$$

$$d) \quad \frac{1}{2} \leq -b \leq 2 \quad (2) \quad | (\quad)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq b^2 \leq 4 \quad | (\quad)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 16 \geq \frac{4}{b^2} \geq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow -16 \leq -\frac{4}{b^2} \leq -1 \quad | +3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-13 \leq 3 - \frac{4}{b^2} \leq 2}$$

Question 4

$$(1) a) \quad V = \frac{a^2 \cdot h}{3}$$

$$\text{Donc } a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$$

$$\Leftrightarrow 3V = a^2 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow \frac{3V}{h} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{\frac{3V}{h}} = a}$$

$$b) \quad 2,1 \leq V \leq 2,4 \quad (\text{l}) \quad \text{l} = \text{dm}^3$$

$$\Leftrightarrow 2100 \leq V \leq 2400 \quad (\cdot 3 \quad (\text{en cm}^3))$$

$$\Leftrightarrow 6300 \leq 3V \leq 7200 \quad | :$$

$$7 \leq h \leq 7,2$$

$$\frac{875 \leq \frac{3V}{h} \leq 1028,57}{h}$$

$$29,58 \leq \sqrt{\frac{3V}{h}} \leq 32,07$$

$$\text{Donc: } \boxed{29 \leq a \leq 33}$$

$$(2) a) \quad A = \frac{b+B}{2} \cdot h \quad (\cdot 2 \quad | : h)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2A}{h} = b+B \quad | - B$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{2A}{h} - B = b}$$

$$b) \quad 4000 \leq A \leq 4100 \quad (\text{mm}^2) \quad (\cdot 2)$$

$$8000 \leq 2A \leq 8200 \quad | :$$

$$60 \leq h \leq 64$$

$$\frac{8000}{64} \leq \frac{2A}{h} \leq \frac{8200}{60}$$

$$125 \leq \frac{2A}{h} \leq 136,6 \quad | -$$

$$62 \leq B \leq 63$$

$$62 \leq \frac{2A}{h} - B \leq 74,6$$

$$\text{Donc } \boxed{62 \leq b \leq 75}$$