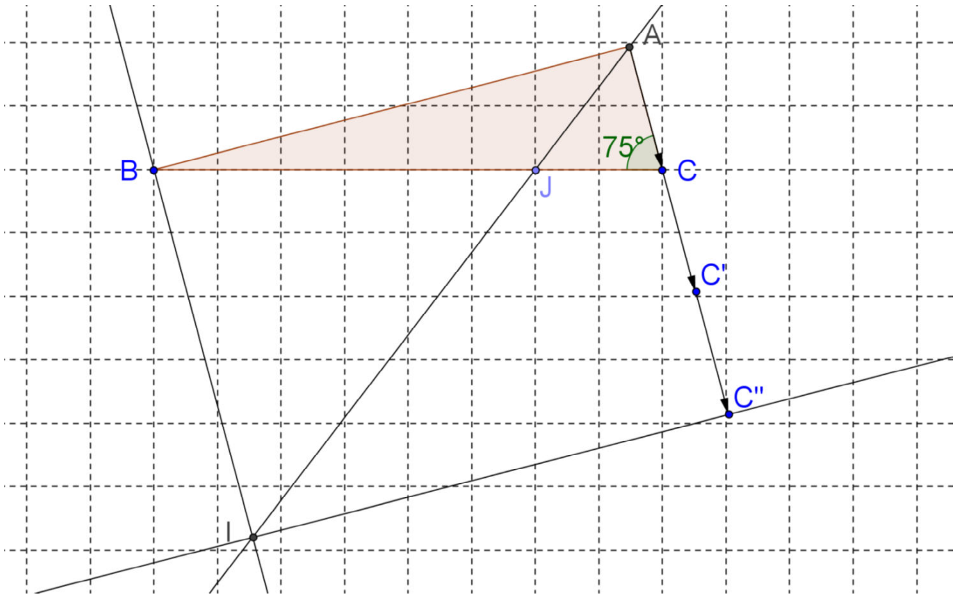
Nom : .... Prénom : ....

4M4 Corrigé du devoir II,2 22.05.2013

Question 1 14 (=2+6+6) points

(1) Figure :



(2) Voir figure ci-dessus.

(3) On a d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AI}-4\overrightarrow{BJ}\\&=\left(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)-3\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

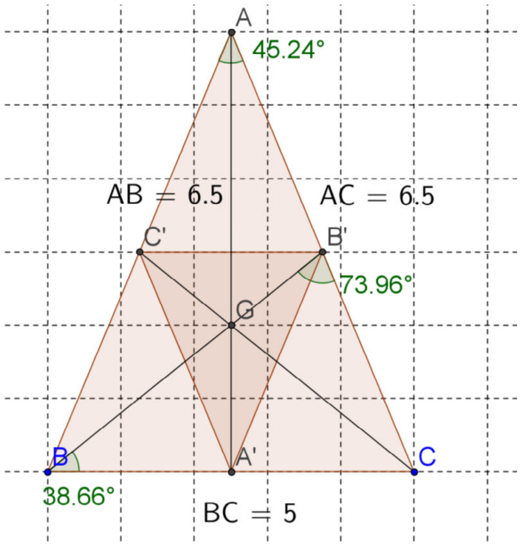
Donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AI}-4\overrightarrow{BJ}=4\overrightarrow{AB}\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{BJ}+4\overrightarrow{AB}\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=4\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AJ}\end{aligned}$$

Les points A, I et J sont alignés car la dernière relation montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires.

Question 2

(1) Figure :



(2) Comme G est le centre de de gravité du triangle ABC, on sait que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$. Donc :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}\\&=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=-\frac{1}{2}\vec{0}=\vec{0}\end{aligned}$$

(3) D'après le théorème des milieux on sait que :

$$A'B'=\frac{AB}{2}=3,25\ \text{cm},\ A'C'=\frac{AC}{2}=3,25\ \text{cm et } B'C'=\frac{BC}{2}=2,5\ \text{cm}$$

(4) a) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $AA'B$, rectangle en A' :

$AA'^2=6,5^2-2,5^2=36\Leftrightarrow AA'=6\ \text{cm}$

b) $A'G=\frac{1}{3}AA'=2\ \text{cm}$

c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $BA'G$, rectangle en A' :

$BG^2=BA'^2+A'G^2$

$\Leftrightarrow BG^2=2,5^2+2^2=10,25$

$\Leftrightarrow BG=\sqrt{10,25}=\sqrt{\frac{41}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}\cong 3,20\ \text{cm}$

d) Comme le triangle $A'B'C'$ est isocèle en A', on a :

$$C'G=B'G=\frac{1}{3}BB'=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}BG=\frac{1}{2}BG=\frac{\sqrt{10,25}}{2}=\frac{\sqrt{41}}{4}\cong 1,60\ \text{cm}$$

(5) a) $\sin \widehat{BAA'} = \dfrac{2,5}{6,5} = \dfrac{25}{65} = \dfrac{5}{13} \Leftrightarrow \widehat{BAA'} = \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right)$

Donc : $\widehat{BAC} = 2\sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) \cong 45,24°$.

b) Remarquons que $\widehat{B'BC} = \widehat{GBA'}$:

$$\tan \widehat{GBA'} = \frac{GA'}{A'B} = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \widehat{GBA'} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \cong 38,66°$$

c) Comme le triangle ABC, est isocèle on a :

$$\widehat{ACB} = \frac{180° - \widehat{BAC}}{2} = 90° - \widehat{BAA'} = 90° - \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \widehat{BB'C} &= 180° - \widehat{B'BC} - \widehat{ACB} \\ &= 180° - \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \left(90° - \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\ &= 90° - \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \\ &\cong 73,96° \end{aligned}.$$

Question 3

(1) On a :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + 2\overrightarrow{RC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{RC'} + 2\overrightarrow{RC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{RC'} + \overrightarrow{RC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow R = \text{mil}[CC'] \end{aligned}$$

(2) a) D'après la caractérisation vectorielle du centre de gravité :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \end{aligned}.$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{SG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Donc S appartient à la droite d' passant par G et parallèle à (BC).

b) D'autre part :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SA} = \underline{\overrightarrow{BC}} + \overrightarrow{BA} + \underline{\overrightarrow{CA}}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{BA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Donc S appartient à la droite $(AB) = d''$.

c) S est le point d'intersection de d' et d''.