Nom : .... Prénom : ....

4M4 Corrigé du devoir III,3 26.06.2013

Question 1

Dans un repère cartésien du plan, on donne les points $A\left(3,y\right)$, $B\left(5,8\right)$ et $C\left(6,3-y\right)$.

a) A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,/\,/\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8-y & 3-2y \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(3-2y\right)-3\left(8-y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 6-4y-24+3y=0$$
$$\Leftrightarrow -y-18=0$$
$$\Leftrightarrow y=-18$$

b) Si $y=-18$, alors $A\left(3,-18\right)$ et $C\left(6,21\right)$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\26\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\39\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Question 2

(1) $ABCD$ est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-x_D\\-y_D\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}11-x_D=-3\\-y_D=9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_D=14\\y_D=-9\end{cases}$$

Donc : $D\left(14,-9\right)$.

(2) On simplifie l'équation :

$$\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

On passe aux coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - 2 \\ y_K + 8 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K - 2 = \dfrac{-9}{5} + \dfrac{9}{5} \\ y_K + 8 = \dfrac{27}{5} + \dfrac{8}{5} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 2 \\ y_K = -1 \end{cases}$$

Donc : $K\left(2,-1\right)$

(3) $\det\left(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KD}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$, donc $K \in \left(BD\right)$.

Question 3

a) $a : 2x - 3y + 1 = 0$

Vecteur directeur : $\vec{a}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

x	-5	-2	1	4	7
y	-3	-1	1	3	5

b) $b : 2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

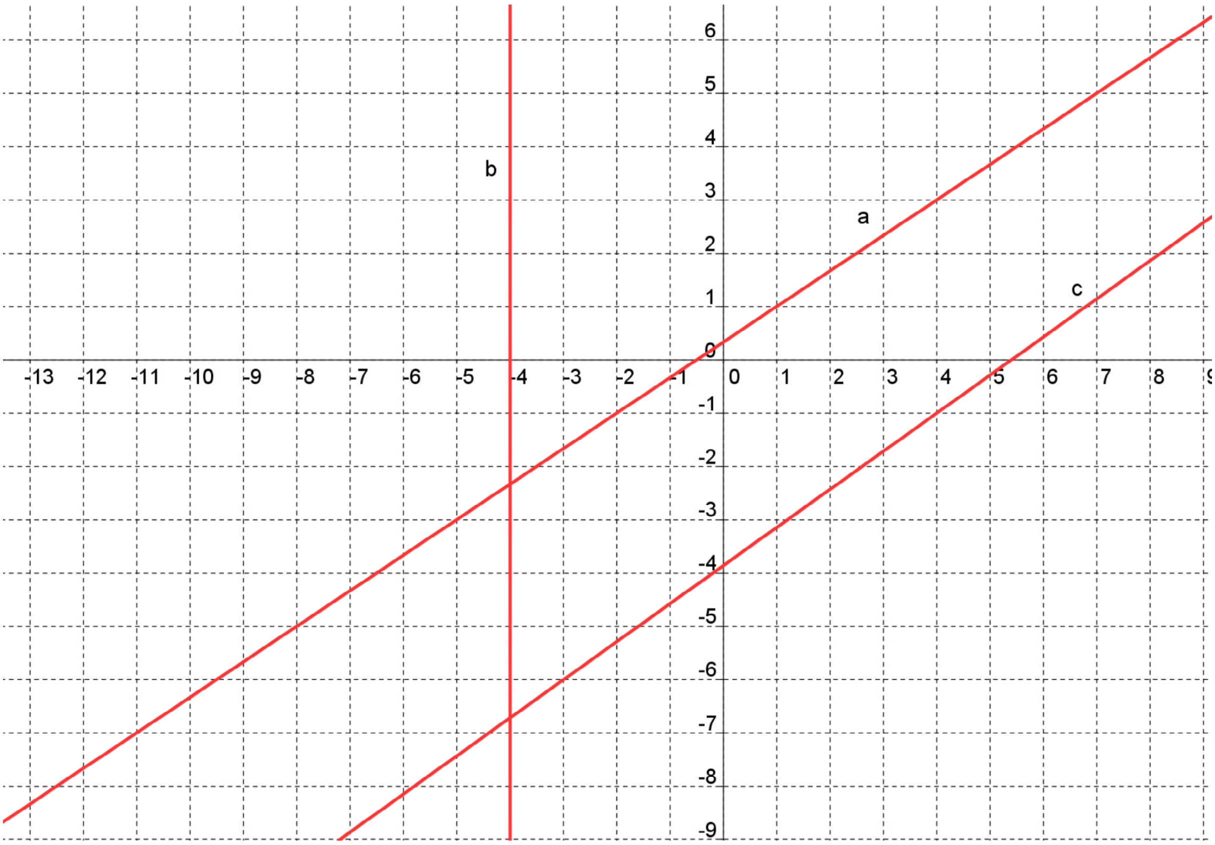
Vecteur directeur : $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

x	-4	-4	-4	-4	-4
y	-2	-1	0	1	2

c) $c : \dfrac{x-4}{7} = \dfrac{y+1}{5}$

Vecteur directeur : $\vec{c}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

x	-10	-3	4	11	18
y	-11	-6	-1	4	9



$a \parallel c \Leftrightarrow \det(\vec{a},\vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 15 - 14 = 0$, FAUX !

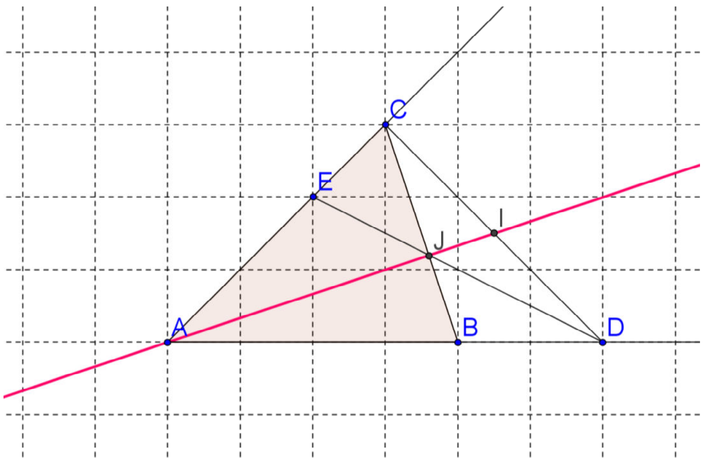
Donc a et c ne sont pas parallèles.

Question 4

(1) a) $2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

b)

$$2\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$



(2) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:

a) $A\left(0{,}0\right)$, $B\left(1{,}0\right)$, $C\left(0{,}1\right)$, $D\left(\frac{3}{2},0\right)$, $E\left(0,\frac{2}{3}\right)$

b) $I\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$

c) Equation cartésienne de (BC) :

$$\begin{aligned}
& M\left(x,y\right) \in \left(BC\right) \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BC} \\
& \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow x + y - 1 = 0
\end{aligned}$$

Equation cartésienne de (ED) :

$$\begin{aligned}
& M\left(x,y\right) \in \left(ED\right) \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{EM} \parallel \overrightarrow{ED} \\
& \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{ED}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \frac{3}{2} \\ y-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{3}{2}\left(y - \tfrac{2}{3}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{3}{2}y + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow 4x + 9y - 6 = 0
\end{aligned}$$

d) $J \begin{cases} x + y - 1 = 0 & (1) \\ 4x + 9y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$

D'après (1) : $y = -x + 1$ (3)

(3) dans (2) : $$\begin{aligned} & 4x + 9\left(-x+1\right) - 6 = 0 \\ & \Leftrightarrow -5x + 3 = 0 \qquad (4) \\ & \Leftrightarrow x = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

(4) dans (3) : $y = \frac{2}{5}$

Donc : $J\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

(3) A, I et J sont alignés

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \parallel \overrightarrow{AJ} \\
& \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \tfrac{6}{20} - \tfrac{3}{10} = 0
\end{aligned}$$

VRAI !

Donc : A, I et J sont alignés.

G. Lorang