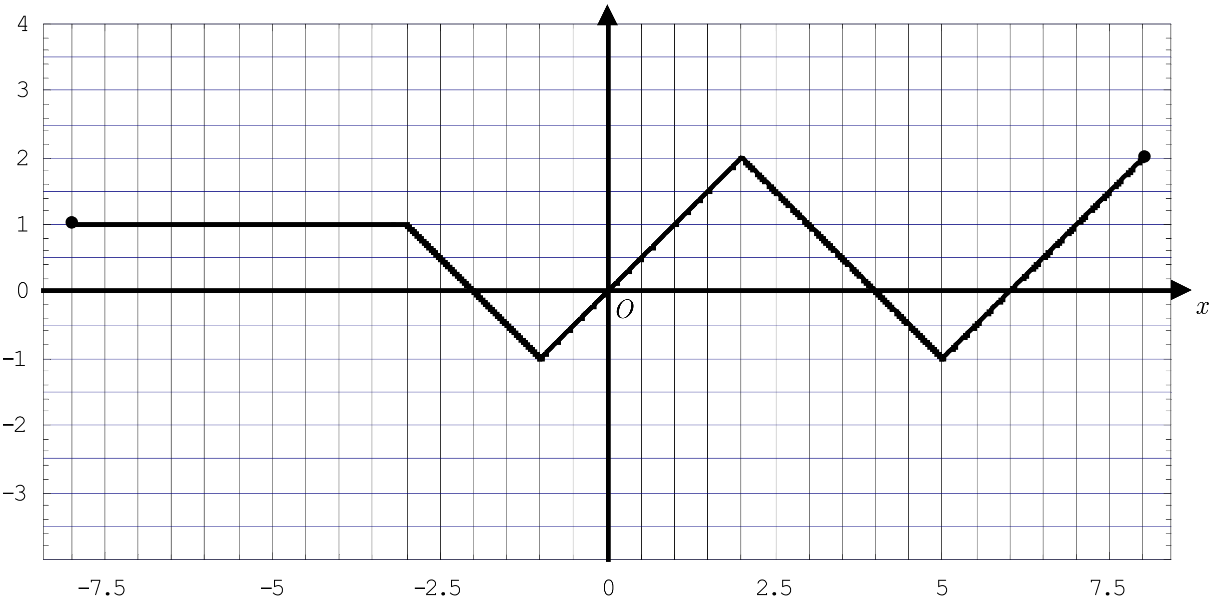
| 4M6 | Corrigé du devoir de mathématiques I,2 | 12.11.03 |
|---|---|---|

## Exercice 1

(1) Lors de la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$, le degré de $A(x)$ est égal à **somme des degrés de** $B(x)$ **et du quotient** $Q(x)$ et le degré du reste $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $B(x)$.

(2) Voir manuel.

## Exercice 2




(1) $\text{dom}_f = [-8,8]$

(2) $f(-5) = 1$, $f(4) = 0$ et $f(-1) = -1$.

(3) a) 2 a comme antécédents 2 et 8 car $f(2) = f(8) = 2$.

b) –3 n'a pas d'antécedent par $f$.

(4) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 0$ ou $x = 4$ ou $x = 6$

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$ ou $x = 7$ ou $x \in [-8,-3]$

(5) a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-8,-2[$ ou $x \in ]0,4[$ ou $x \in ]6,8]$

b) $1 < f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in ]1,3[$ ou $x \in ]7,8]$

## Exercice 3

(1)

$$\begin{array}{r|l} 2x^8 - 54x^5 + 8x^3 - 216 & x^3 - 27 \\ \hline -2x^8 + 54x^5 \phantom{+ 8x^3 - 216} & 2x^5 + 8 \\ \hline 8x^3 - 216 & \\ -8x^3 + 216 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc : $2x^8 - 54x^5 + 8x^3 - 216 = \left(x^3 - 27\right)\left(2x^5 + 8\right) = 2\left(x^3 - 27\right)\left(x^5 + 4\right)$

Résolvons l'équation $A(x) = 0$ :

$$\begin{aligned} A(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\left(x^3 - 27\right)\left(x^5 + 4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 27 = 0 \text{ ou } x^5 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 27 \text{ ou } x^5 = -4 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ ou } x = \sqrt[5]{-4} = -\sqrt[5]{4} \end{aligned}$$

(2) $T(x) = 5x^2 - 2ax + a$ est ***divisible par*** $x + 3$

$\Leftrightarrow T(-3) = 0$

$\Leftrightarrow 5(-3)^2 - 2a(-3) + a = 0$

$\Leftrightarrow 45 + 6a + a = 0$

$\Leftrightarrow 7a = -45$

$\Leftrightarrow a = -\dfrac{45}{7}$

Dans ce cas : $T(x) = 5x^2 + \frac{90}{7}x - \frac{45}{7} = \frac{1}{7}\left(35x^2 + 90x - 45\right)$

Schéma de Horner pour la division de $35x^2 + 90x - 45$ par $x + 3$ :

| | 35 | 90 | -45 |
|---|---|---|---|
| -3 | | -105 | 45 |
| | 35 | -15 | 0 |

Donc : $T(x) = \frac{1}{7}\left(35x^2 + 90x - 45\right) = \frac{1}{7}(x+3)(35x - 15) = (x+3)\left(5x - \frac{15}{7}\right)$.

(3) Par un calcul direct :

$$\begin{aligned} U(-3) &= (-3)^4 - 2(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) - 10 \\ &= 81 + 54 + 9 + 9 - 10 \\ &= 143 \end{aligned}$$

ou bien, par le schéma de Horner :

| | 1 | -2 | 1 | -3 | -10 |
|---|---|---|---|---|---|
| -3 | | -3 | 15 | -48 | 153 |
| | 1 | -5 | 16 | -51 | 143 |

Donc : $U(-3) = 143$.

(4) D'après la loi du reste, le reste de la division euclidienne de $G(y)$ par $y - 1$ est $G(1) = 17 - 13 + 14 - 18 = 0$ et le reste de la division euclidienne de $G(y)$ par $y + 1$ est $G(-1) = 17 - 13 + 14 - 18 = 0$. On peut en déduire que $G(y)$ est divisible par $y - 1$ et par $y + 1$, donc par $(y-1)(y+1) = y^2 - 1$.

G. Lorang