Exercice 2

(1) Dans le $\Delta(ABC)$:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$$
$$\Leftrightarrow 90°+\beta+\gamma=180°$$
$$\Leftrightarrow \beta+\gamma=90°$$

Donc β et γ sont complémentaires.

(2) Dans le $\Delta(ABH)$:

$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{H}=180°$

$\Leftrightarrow \hat{A}_1+\beta+90°=180°$

$\Leftrightarrow \hat{A}_1=180°-90°-\beta$

$\Leftrightarrow \hat{A}_1=90°-\beta$

$\Leftrightarrow \hat{A}_1=\gamma$

Or : $\hat{A}=90°$, donc :

$\hat{A}_2=\hat{A}-\hat{A}_1$

$=90°-\gamma=\beta$

(3) $\Delta(ABC)\sim\Delta(HBA)$ car :

$\hat{A}=\hat{H}=90°$ (angle droit),

$\hat{B}=\hat{B}=\beta$ (angle commun),

$(\hat{C}=\hat{A}_1=\gamma)$.

Comme les 3 angles sont égaux, les deux triangles sont semblables.

$\Delta(ABC)\sim\Delta(HAC)$ car :

$\hat{A}=\hat{H}=90°$ (angle droit),

$\hat{C}=\hat{C}=\gamma$ (angle commun),

$(\hat{B}=\hat{A}_2=\beta)$.

Comme les 3 angles sont égaux, les deux triangles sont semblables.

Remarque : Il suffit bien sûr de préciser 2 angles égaux dans chaque triangle pour démontrer qu'ils sont semblables.

(4) a) Comme $\Delta(ABC)\sim\Delta(HBA)$, on a : $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{h}=\dfrac{c}{x}$

b) Comme $\Delta(ABC)\sim\Delta(HAC)$, on a : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{h}$

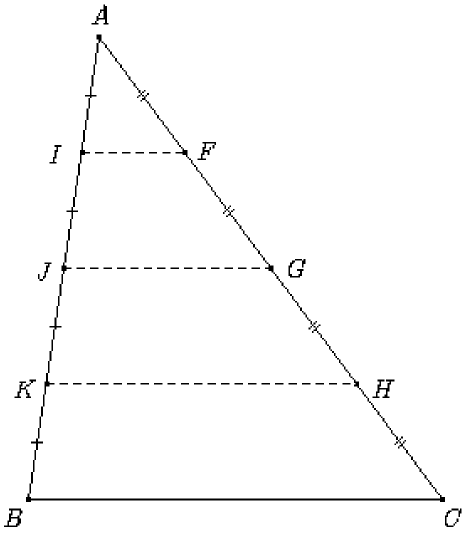
c) Donc, en multipliant en croix, on a : $ax=c^2$ $(*)$ et $ay=b^2$ $(**)$

d) Pour conclure, on additionne membre par membre $(*)$ et $(**)$:

$$ax+ay=b^2+c^2$$
$$\Leftrightarrow a(x+y)=b^2+c^2$$
$$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$$

car $x+y=a$. Ceci termine la démonstration du théorème de Pythagore : si le triangle ABC est rectangle en A, alors $a^2=b^2+c^2$.

Exercice 3



(1) Les triangles AIF et AJG ont un angle commun (à savoir $\hat{A}$) compris entre deux côtés proportionnels :

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2}$$

Ils sont donc semblables. On en déduit que les angles correspondants $\hat{I}$ et $\hat{J}$ sont égaux. Par conséquent $IF \parallel JG$.

(2) $\Delta(AIF) \sim \Delta(AJG) \sim \Delta(AKH) \sim \Delta(ABC)$

(3) $\Delta(AKH) \xrightarrow{\cdot\frac{1}{3}} \Delta(AIF)$.

Donc : $\text{Aire}(\Delta(AIF)) = \frac{1}{9}\text{Aire}(\Delta(AKH)) = \frac{18}{9} = 2 \text{ cm}^2$.

(4) $\Delta(AKH) \xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}} \Delta(AGJ)$.

Donc : $\overline{JG} = \frac{2}{3}\overline{KH} \Leftrightarrow \overline{KH} = \frac{3}{2}\overline{JG} = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9 \text{ cm}$.

(5) $\Delta(AKH) \xrightarrow{\cdot\frac{4}{3}} \Delta(ABC)$.

Donc : $\overline{BC} = \frac{4}{3}\overline{KH} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12 \text{ cm}$ et

$\text{Aire}(\Delta(ABC)) = \frac{16}{9}\text{Aire}(\Delta(AKH)) = \frac{16 \cdot 18}{9} = 32 \text{ cm}^2$.

G. Lorang