4M6 Corrigé du devoir de mathématiques II,1 23.01.04

Exercice 2

$\overline{OA} = 2{,}5$, $\overline{OB} = 1{,}5$, $\overline{OA'} = 3$, $\overline{OB'} = 1{,}9$ et $\overline{AC} = 7$.

(1) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \dfrac{2{,}5}{1{,}5} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \dfrac{3}{1{,}9} = \dfrac{30}{19} \neq \dfrac{5}{3}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, AA' et BB' ne sont donc pas parallèles.

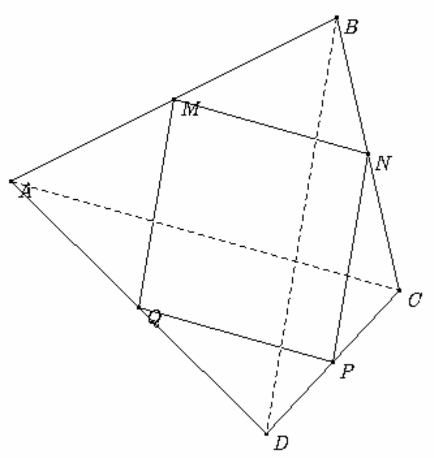
(2) Comme $AA' \parallel CC'$, on a d'après le th. de Thalès dans le quadrilatère croisé $ACC'A'$:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OC'}}{3} = \frac{4{,}5}{2{,}5} \Leftrightarrow \overline{OC'} = \frac{3 \cdot 45}{25} = \frac{27}{5} = 5{,}4$$

Par conséquent : $\overline{B'C'} = \overline{OC'} - \overline{OB'} = 5{,}4 - 1{,}9 = 3{,}5$.

Exercice 3

(1) Le quadrilatère $MNPQ$ semble être un parallélogramme.



(2) Démonstration :

Comme $M = \text{mil}[AB]$ et $N = \text{mil}[BC]$, on a :

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABC, on a donc :

$$MN \parallel AC \quad (1)$$

Comme $P = \text{mil}[CD]$ et $Q = \text{mil}[DA]$, on a :

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DA}} = \frac{1}{2}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABC, on a donc :

$$PQ \parallel AC \quad (2)$$

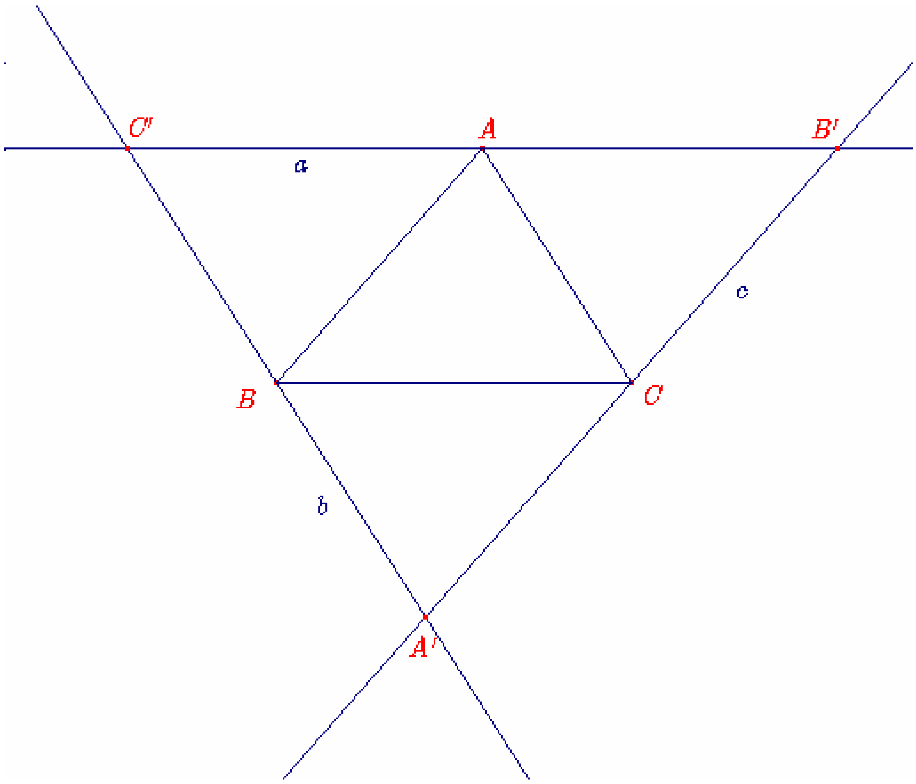
D'après (1) et (2), on a : $MN \parallel PQ$.

On démontre de façon analogue que : $MQ \parallel NP \, (\parallel BD)$.

Donc : $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 4

(1)



(2)

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} \quad \text{car } AC \parallel b$$

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} \quad \text{car } BC \parallel a$$

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} \quad \text{car } AB \parallel c$$

Par conséquent :

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} \Leftrightarrow \overline{AB'}^2 = \overline{AC'}^2 \text{ (multiplication en croix)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB'} = \overline{AC'} \quad (\text{car } \overline{AB'} \geq 0 \text{ et } \overline{AC'} \geq 0)$$

et donc $A = \text{mil}[B'C']$.

(3) De façon analogue, on peut démontrer que $B = \text{mil}[A'C']$ et $C = \text{mil}[A'B']$.

G. Lorang