Exercice 1

(1) a) Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs.

b) Une similitude est la composée d'une isométrie par une homothétie. De manière équivalente, on peut dire que c'est une transformation du plan qui conserve les angles.

c) Soient f et g deux transformations du plan. On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ la transformation qui associe à tout point M le point $M' = g \circ f(M) = g(f(M))$.

(2) a) Une isométrie est toujours une similitude car une isométrie conserve les angles.

b) Réciproquement, une similitude n'est pas toujours une isométrie. En effet, si l'homothétie dans la définition de la similitude est de rapport k différent de 1 et de -1, alors les longueurs ne sont plus conservées.

c) Les similitudes qui conservent les directions sont l'identité du plan, les translations, les symétries centrales et les homothéties.

(3)	Translation	Rotation	Symétrie axiale	Symétrie glissée
Conservation des longueurs	oui	oui	oui	oui
Conservation des angles	oui	oui	oui	oui
Conservation des directions	oui	non (si $\alpha \neq 0°, \pm 180°, \pm 360°$ ...)	non	non
Conservation de l'orientation	oui	oui	non	non

Exercice 2

(1) f_1 transforme ABC en ADE.

a) $f_1(A) = A$, $f_1(B) = E$ et $f_1(C) = D$ car $\hat{B} = \hat{E}$ et $\hat{C} = \hat{D}$.

b) f_1 est directe car les triangles ABC et ADE ont même orientation.

c) f_1 est donc une translation ou une rotation. Or, f_1 ne conserve pas les directions, donc c'est une rotation. Comme $f_1(A) = A$, le centre est nécessairement A. L'angle est égal à $\widehat{BAE} = -50°$. Ainsi : $f_1 = r_{A,-50°}$.

(2) f_2 transforme ABC en FGH.

a) $f_2(A) = F$, $f_2(B) = H$ et $f_2(C) = G$ car $\hat{A} = \hat{F}$, $\hat{B} = \hat{H}$ et $\hat{C} = \hat{G}$.

b) f_2 est directe car les triangles (A,B,C) et (F,H,G) ont même orientation.

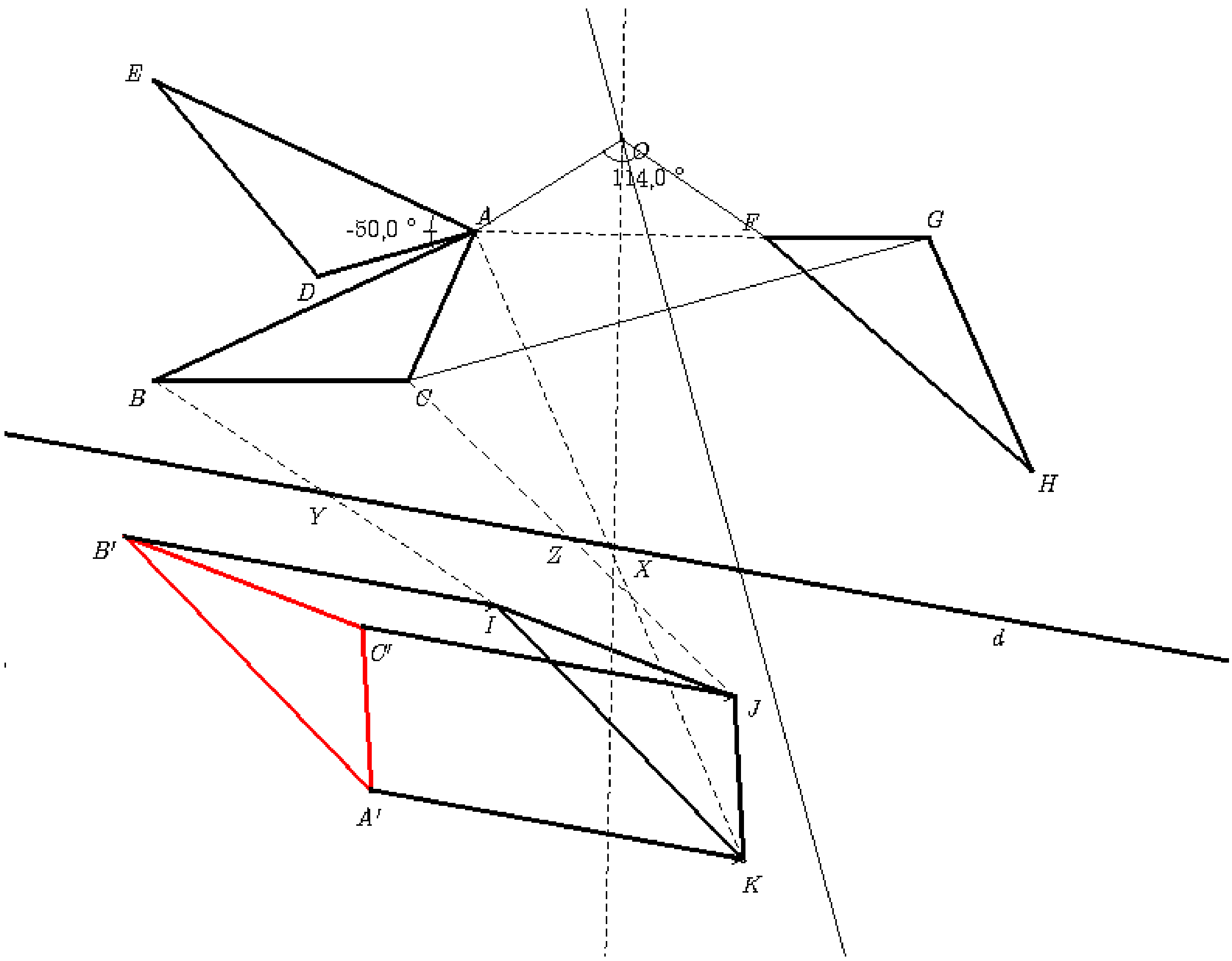
c) f_2 est donc une translation ou une rotation. Or, f_2 ne conserve pas les directions, donc c'est une rotation. Comme $f_2(A) = F$ et $f_2(C) = G$, le centre O est nécessairement le point d'intersection des médiatrices des segments $[AF]$ et $[CG]$. Evidemment la médiatrice de $[BH]$ passe aussi par O. L'angle est égal à $\widehat{AOF} = 114°$. Ainsi : $f_2 = r_{O,114°}$.

(3) f_3 transforme ABC en IJK.

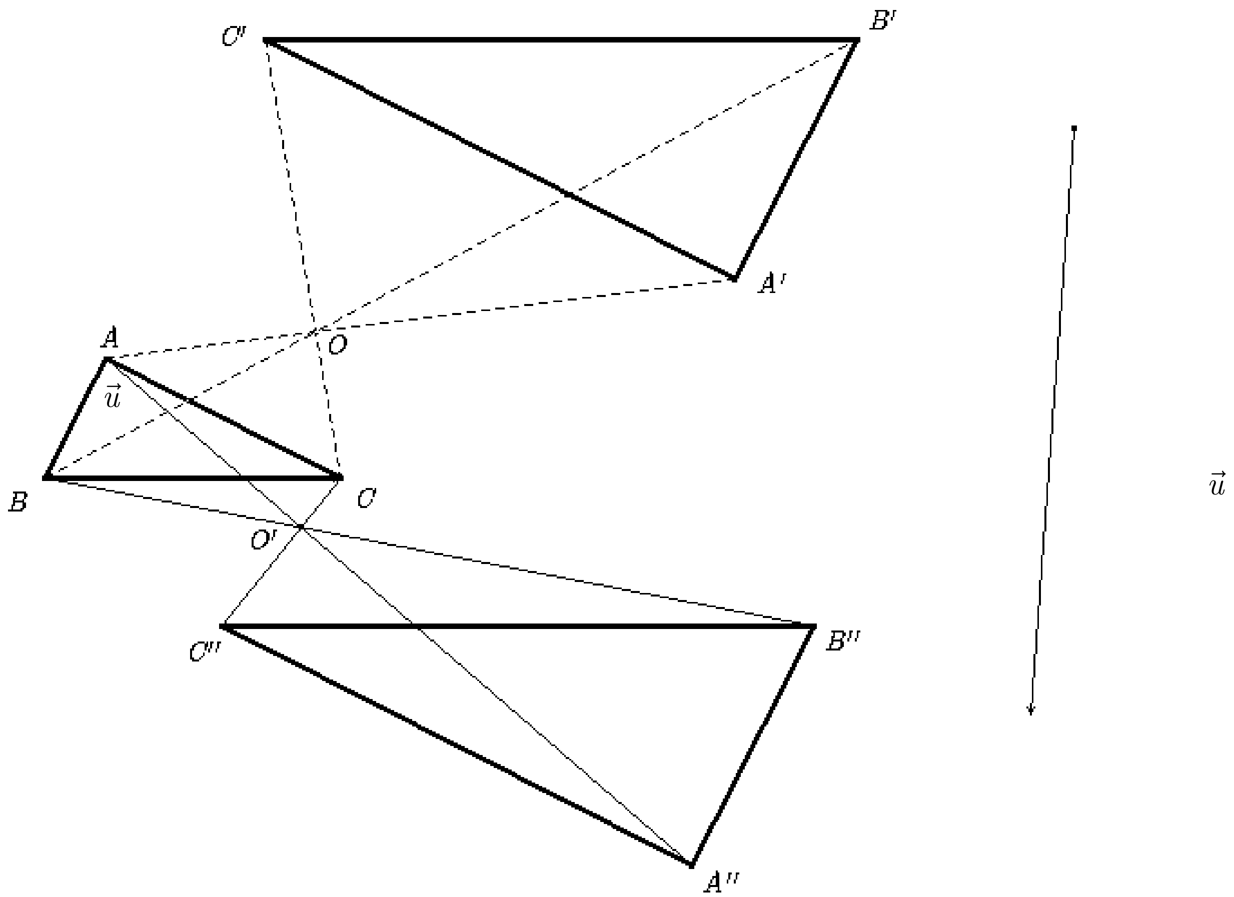
a) $f_3(A) = K$, $f_3(B) = I$ et $f_2(C) = J$ car $\hat{A} = \hat{K}$, $\hat{B} = \hat{I}$ et $\hat{C} = \hat{J}$.

b) f_3 est indirecte car les triangles (A,B,C) et (K,I,J) n'ont pas même orientation.

c) f_3 est donc une symétrie axiale ou une symétrie glissée. Nous savons que les milieux X, Y et Z des segments $[AK]$, $[BI]$ et $[CJ]$ respectivement sont situés sur l'axe d de cette transformation. Or, visiblement d n'est pas la médiatrice de $[AK]$, ni de $[BI]$, ni $[CJ]$. Donc f_3 est une symétrie glissée d'axe d. Le vecteur $\vec{u}$ de cette symétrie glissée s'obtient en construisant d'abord l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par la symétrie axiale s_d . Puis : $\vec{u} = \overrightarrow{B'I} = \overrightarrow{C'J} = \overrightarrow{A'K}$. On a : $f_3 = s_d \circ t_{\vec{u}}$.



Exercice 3



(1) $A'B'C' = h_{O,-2}(ABC)$.

(2) $A''B''C'' = t_{\vec{u}}(A'B'C')$.

(3) $t_{\vec{u}} \circ h_{O,-2}(ABC) = A''B''C''$.

(4) $AB // A''B''$, $AC // A''C''$ et $BC // B''C''$ puisque $h_{O,-2}$ et $t_{\vec{u}}$ conservent les directions, donc également la composée.

(5) Les triangles ABC et $A''B''C''$ sont semblables puisque $h_{O,-2}$ et $t_{\vec{u}}$ sont des similitudes, donc également la composée.

(6) $t_{\vec{u}} \circ h_{O,-2}$ est une homothétie de rapport –2. En effet, c'est une similitude qui conserve les directions et ce n'est pas une isométrie. C'est donc une homothétie. Son centre O' est le point d'intersection des droites AA'', BB'' et CC''. Comme $\overline{A''B''} / \overline{AB} = 2$, le rapport k de cette homothétie est 2 ou –2. Mais puisque A et A'' sont de part et d'autre de O', le rapport est nécessairement –2. Donc :

$$t_{\vec{u}} \circ h_{O,-2} = h_{O',-2}$$