4M7 | Devoir de mathématiques III,1 | 19.05.03

Exercice 1 — 24 (=16+8) points

(1) Etant donné un triangle ABC, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes pour un point G :

(i) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$,

(ii) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, où $A'=\text{mil}[BC]$,

(iii) $(\forall M\in\Pi)\ \ \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

Comment est appelé ce point G et quelle en est une propriété supplémentaire ?

(2) Définir la notion de base, puis énoncer le théorème sur la décomposition d'un vecteur dans une base.

Exercice 2 — 24 (=4+5+5+6+4) points

(1) Etant donné un triangle ABC, construire $I=\text{mil}[AB]$ et J tel que $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

(2) En déduire que $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Quelles sont alors les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$?

(3) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$, puis construire K.

(4) En déduire que $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Quelles sont alors les coordonnées de $\overrightarrow{IK}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$?

(5) Déterminer une relation de colinéarité entre $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$. Que peut-on alors conclure ?

Exercice 3 — 15 (=3+3+6+3) points

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque et $I=\text{mil}[AB]$, $J=\text{mil}[BC]$, $K=\text{mil}[CD]$, $L=\text{mil}[DA]$. On définit le point X par la relation :

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=\vec{0}\ \ (*).$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement X.

(1) Exprimer $\overrightarrow{XI}$ en fonction de $\overrightarrow{XA}$ et de $\overrightarrow{XB}$.

(2) Exprimer de même $\overrightarrow{XK}$ en fonction de $\overrightarrow{XC}$ et de $\overrightarrow{XD}$.

(3) Démontrer à l'aide de la relation $(*)$ que : $\overrightarrow{XI}+\overrightarrow{XK}=\vec{0}$.

(4) En déduire une construction géométrique simple de X.

Bon courage !

G. Lorang