Exercice 1

(1) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Comme $A' = \text{mil}[BC]$, on sait que $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}\right) = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AA'}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}
\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) :

$(\forall M \in \Pi)$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)
\end{aligned}$$

G est le centre de gravité du triangle ABC : c'est le point d'intersection des trois médianes du triangle.

(2) Voir cours.

Exercice 2

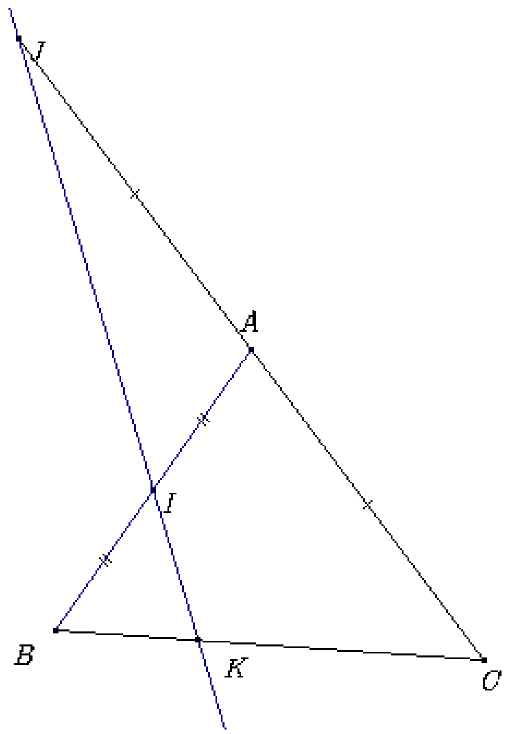
(1) $I = \text{mil}[AB]$ et $A = \text{mil}[JC]$.

(2) On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\\
&= -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Cela signifie que :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dans } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right).$$



(3) On a :

$2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

On en déduit la construction de K (voir figure).

(4) On a : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

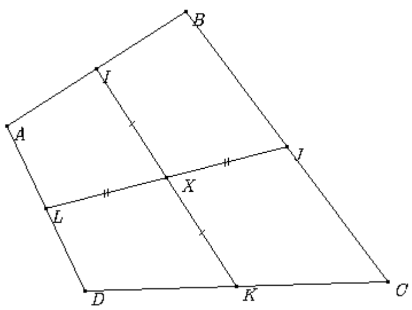
Cela signifie que :

$$\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ dans } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

(5) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IK}$ ou $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IK}$.

On en déduit que I, J et K sont alignés.

Exercice 3



$I = \text{mil}[AB]$,

$J = \text{mil}[BC]$,

$K = \text{mil}[CD]$,

$L = \text{mil}[DA]$.

$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} = \vec{0}$ $(*)$.

(1) D'après le théorème sur le milieu, on sait que $\overrightarrow{XI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right)$.

(2) De même : $\overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}\right)$.

(3) On a, en appliquant (1) et (2) :

$\overrightarrow{XI} + \overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD}\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ d'après la relation $(*)$.

(4) Comme $\overrightarrow{XI} + \overrightarrow{XK} = \vec{0}$, on sait d'après le théorème du milieu que $X = \text{mil}[IK]$. On pourrait démontrer de la même façon que $X = \text{mil}[JL]$. X est donc le point d'intersection des droites IK et JL.

Remarque : $IJKL$ est un parallélogramme car $X = \text{mil}[IK] = \text{mil}[JL]$.

G. Lorang