## Exercice 1

Voir cours.

## Exercice 2

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan et $A(3,-4)$, $B(-2,1)$ et $C(5,3)$ trois points donnés.

(1) Soit $D(x,y)$. On sait que $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Or :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-x\\3-y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}5-x=-5\\3-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10\\y=-2\end{cases}$$

Donc : $D(10,-2)$.

(2) Par exemple : $I = \text{mil}[AC]$. Donc $I\left(4,-\frac{1}{2}\right)$.

(3) Soit $P(x,y)$. On a :

$$\overrightarrow{BP} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=\frac{1}{3}\cdot 7\\y-1=\frac{1}{3}\cdot 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{5}{3}\end{cases}$$

Donc : $P\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$. On trouve de même $Q\left(\frac{23}{3},\frac{-8}{3}\right)$

(4) $\overrightarrow{IP}\left(-\frac{11}{3},\frac{13}{6}\right)$ et $\overrightarrow{IQ}\left(\frac{11}{3},-\frac{13}{3}\right)$. Donc $\overrightarrow{IP} = -\overrightarrow{IQ}$. En d'autres termes, $I = \text{mil}[PQ]$. En particulier, $I$, $P$ et $Q$ sont alignés.

## Exercice 3

(1) $\overrightarrow{AB}(7,-5)$ et $\overrightarrow{CD}(-4,-10)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix}7 & -4\\-5 & -10\end{vmatrix} = -70-20 = -90 \neq 0\,.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, ce qui signifie que les droites $AB$ et $CD$ sont sécantes.

(2) Le réel $k$ existe puisque $A$, $I$ et $B$ sont alignés, par définition du point $I$. Soit $I(x,y)$.

$$\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=7k\\y-4=-5k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7k-2\\y=-5k+4\end{cases}.$$

Donc : $I(7k-2,-5k+4)$.

(3) $C$, $D$ et $I$ sont alignés

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 7k-2-4 & -4 \\ -5k+4-3 & -10 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (7k-6)\cdot(-10) - (-5k+1)\cdot(-4) = 0$

$\Leftrightarrow -70k+60-20k+4 = 0$

$\Leftrightarrow -90k+64 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{64}{90} = \frac{32}{45}$

(4) Donc $I\left(7\cdot\frac{32}{45}-2, -5\cdot\frac{32}{45}+4\right) = I\left(\frac{134}{45}, \frac{4}{9}\right)$.

G. Lorang