Question 1

(1) Voir manuel.

(2) D'après la loi du reste, $P(-15)$ est le reste de la division de $P(x)$ par $x+15$:

	1	5	–120	150
–15		–15	150	-450
	1	–10	30	-300

Donc $P(-15) = -300$.

Question 2

(1) C.E. :

$$\begin{aligned} & x^3 + 2x^2 - 2x - 4 \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2(x+2) - 2(x+2) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+2)\left(x^2 - 2\right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ & x \neq -2 \text{ et } x^2 \neq 2 \\ \Leftrightarrow\ & x \neq -2 \text{ et } x \neq \sqrt{2} \text{ et } x \neq -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc : $\operatorname{dom} F = \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \pm\sqrt{2}\right\}$.

On factorise maintenant le numérateur $N(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$:

$\operatorname{Div} 18 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18\}$

$N(1) = 1 - 4 - 3 + 18 = 12 \neq 0$,

$N(-1) = -1 - 4 + 3 + 18 = 16 \neq 0$,

$N(2) = 8 - 16 - 6 + 18 = 4 \neq 0$,

$N(-2) = -8 - 16 + 6 + 18 = 0$.

Donc $N(x)$ est divisible par $x+2$:

	1	–4	–3	18
–2		–2	12	-18
	1	–6	9	0

Ainsi : $N(x) = (x+2)\left(x^2 - 6x + 9\right) = (x+2)(x-3)^2$.

Finalement :

$$\forall x \in \operatorname{dom} F,\ F(x) = \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)^2}{\cancel{(x+2)}\left(x^2-2\right)} = \frac{(x+3)^2}{x^2-2}.$$

(2) $F(x) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Question 3

(1) $A(-2) = -8$

$\Leftrightarrow 2(m+1)\cdot 4 - 3(m-1)(-2) - 4m - 2 = -8$

$\Leftrightarrow 8m + 8 + 6m - 6 - 4m - 2 = -8$

$\Leftrightarrow 10m = -8$

$\Leftrightarrow m = -\frac{4}{5}$

(2) Si $m = -\frac{4}{5}$ alors

$$\begin{aligned} A(x) &= 2\left(-\tfrac{4}{5}+1\right)x^2 - 3\left(-\tfrac{4}{5}-1\right)x - 4\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right) - 2 \\ &= \tfrac{2}{5}x^2 + \tfrac{27}{5}x + \tfrac{6}{5}. \end{aligned}$$

On divise $A(x)$ par $x+2$:

	$\frac{2}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{6}{5}$
-2		$-\frac{4}{5}$	$-\frac{46}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{23}{5}$	-8

Donc : $\frac{2}{5}x^2 + \frac{27}{5}x + \frac{6}{5} = (x+2)\left(\frac{2}{5}x + \frac{23}{5}\right) - 8$.

Question 4

(1) C.E. : $1 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$;

$1 + 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$;

$4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$

Donc : $x \neq \pm\frac{1}{2}$.

Alors :

$$\begin{aligned} &\frac{x}{1-2x} - \frac{x}{1+2x} + \frac{8x^2}{4x^2-1} \\ &= \frac{x}{1-2x} - \frac{x}{1+2x} + \frac{8x^2}{(2x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{x}{1-2x} - \frac{x}{1+2x} - \frac{8x^2}{(1-2x)(1+2x)} \\ &= \frac{x(1+2x)}{(1-2x)(1+2x)} - \frac{x(1-2x)}{(1-2x)(1+2x)} - \frac{8x^2}{(1-2x)(1+2x)} \\ &= \frac{x + 2x^2 - x + 2x^2 - 8x^2}{(1-2x)(1+2x)} \\ &= -\frac{4x^2}{(1-2x)(1+2x)} \end{aligned}$$

(2) C.E. : $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$;

$1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$;

$x \neq 0$;

Donc : $x \neq \pm 1$ et $x \neq 0$.

Alors :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)\\
&=\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}\right]\left(\frac{3}{4x}+\frac{x^2}{4x}-\frac{4x^2}{4x}\right)\\
&=\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{3-3x^2}{4x}\\
&=\frac{\cancel{4x}}{\cancel{(1-x)\,(1+x)}}\cdot\frac{3\cancel{(1-x)\,(1+x)}}{\cancel{4x}}\\
&=3
\end{aligned}$$

G. Lorang