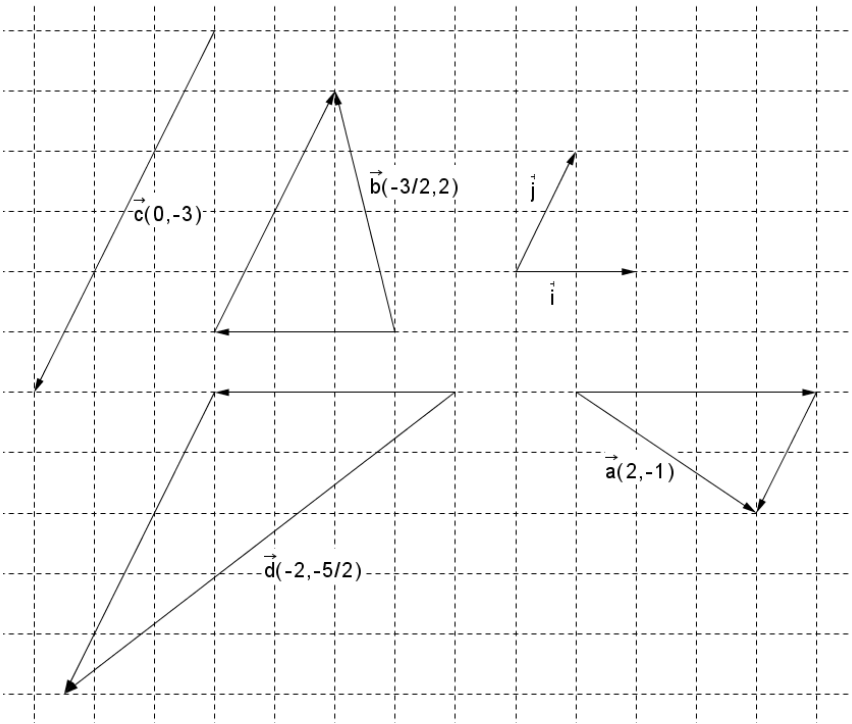
Question 1



Question 2

(1) $ABCD$ est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 2 - y_D \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -4 \end{cases}$$

Donc : $D(9,-4)$.

(2) Le centre I du parallélogramme est le milieu de ses diagonales :

$I = \text{mil}[AC] \Leftrightarrow I(4,0)$

Question 3

(1) Dans le repère $\mathcal{R}$:

- $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$;
- $I = \text{mil}[AC] \Leftrightarrow I\left(0,\frac{1}{2}\right)$;
- $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_R - 1 \\ y_R \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_R = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ y_R = \frac{1}{4} \end{cases}$.

  Donc $R\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.
- $\overrightarrow{AS} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_S = \frac{3}{2} \\ y_S = 0 \end{cases}$

Donc : $S\left(\frac{3}{2},0\right)$.

(2) $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RI}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $\det\left(\overrightarrow{RS},\overrightarrow{RI}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0$.

Donc R, S et I sont alignés. (On voit même que $\overrightarrow{RS}=-\overrightarrow{RI}$, c.-à-d. $R=\text{mil}[SI]$.)

Question 4

(1) $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$; $\det\left(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{KL}\right)=\begin{vmatrix}2 & -5\\1 & 3\end{vmatrix}=6+5=11\neq 0$.

Donc les droites FH et KL ne sont pas parallèles.

(2) $M(x,y)\in FH$

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{FM},\overrightarrow{FH}\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+1 & 2\\ y-2 & 1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow x+1-2(y-2)=0$

$\Leftrightarrow x+1-2y+4=0$

$\Leftrightarrow x-2y+5=0$

Donc $FH:\ x-2y+5=0$.

$M(x,y)\in KL$

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KL}\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & -5\\ y+5 & 3\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 3(x-3)+5(y+5)=0$

$\Leftrightarrow 3x-9+5y+25=0$

$\Leftrightarrow 3x+5y+16=0$

Donc $KL:\ 3x+5y+16=0$.

(3) On a :

$$I\begin{cases}x-2y+5=0 & (1)\\ 3x+5y+16=0 & (2)\end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow x=2y-5 \quad (3)$

(3) dans (2) :

$$3(2y-5)+5y+16=0$$
$$\Leftrightarrow 6y-15+5y+16=0$$
$$\Leftrightarrow 11y+1=0$$
$$\Leftrightarrow y=-\tfrac{1}{11} \quad (4)$$

(4) dans (3) : $x=-\frac{2}{11}-5=-\frac{57}{11}$.

Donc $I\left(-\frac{57}{11},-\frac{1}{11}\right)$.

(4) On a :

$$J\begin{cases}y=0 & (1)\\ 3x+5y+16=0 & (2)\end{cases}$$

(1) dans (2) : $3x+16=0\Leftrightarrow x=-\frac{16}{3}$

Donc $J\left(-\frac{16}{3},0\right)$.

G. Lorang