Question 1

(1) Voir cours

(2) Il faut d'abord réduire et ordonner le polynôme $P(x)$!

a) $$\begin{aligned} P(x) &= x^2(1-x)-(x+2)\left(1-x^2\right) \\ &= x^2-x^3-\left(x-x^3+2-2x^2\right) \\ &= x^2-x^3-x+x^3-2+2x^2 \\ &= 3x^2-x-2 \end{aligned}$$

$P(x)$ est donc un polynôme de degré 2.

b) Valeurs numériques :

$$\begin{aligned} P\left(-\tfrac{6}{11}\right) &= 3\left(-\tfrac{6}{11}\right)^2-\left(-\tfrac{6}{11}\right)-2 \\ &= \tfrac{108}{121}+\tfrac{66}{121}-\tfrac{242}{121} \\ &= -\tfrac{68}{121} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(2-\sqrt{3}\right) &= 3\left(2-\sqrt{3}\right)^2-\left(2-\sqrt{3}\right)-2 \\ &= 3\left(4-4\sqrt{3}+3\right)-2+\sqrt{3}-2 \\ &= 12-12\sqrt{3}+9-4+\sqrt{3} \\ &= 17-11\sqrt{3} \end{aligned}$$

Question 2

(1) $$\begin{aligned} &\frac{x^2(x-3)}{5x^3+20x^2+20x}\cdot\frac{(2x+4)(x-1)}{18-2x^2} \\ &= \frac{x^2(x-3)}{5x\left(x^2+4x+4\right)}\cdot\frac{2(x+2)(x-1)}{2\left(9-x^2\right)} \\ &= \frac{x^2(x-3)}{5x(x+2)^2}\cdot\frac{2(x+2)(x-1)}{2(3-x)(3+x)} \\ &= -\frac{x^2(3-x)}{5x(x+2)^2}\cdot\frac{2(x+2)(x-1)}{2(3-x)(3+x)} \\ &= -\frac{x(x-1)}{5(x+2)(3+x)} \end{aligned}$$

$C.E.: x \neq 0, x \neq -2, x \neq 3$ et $x \neq -3$

(2) $$\begin{aligned} &\frac{ab-b^2}{a^2-b^2} : \frac{(ab)^2}{-a^2-2ab-b^2} \\ &= \frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)} : \frac{a^2b^2}{-(a+b)^2} \\ &= \frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{-(a+b)^2}{a^2b^2} \\ &= -\frac{a+b}{a^2b} \end{aligned}$$

$C.E.: a \neq b, a \neq -b, a \neq 0, b \neq 0$

(3) $$\frac{1-\frac{1}{a-\frac{1}{a}}}{\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}} = \frac{1-\frac{1}{\frac{a^2-1}{a}}}{\frac{a+1-(a-1)}{(a-1)(a+1)}} = \frac{1-\frac{a}{a^2-1}}{\frac{2}{(a-1)(a+1)}} = \frac{\frac{a^2-a-1}{(a-1)(a+1)}}{\frac{2}{(a-1)(a+1)}} = \frac{a^2-a-1}{\cancel{(a-1)(a+1)}}\cdot\frac{\cancel{(a-1)(a+1)}}{2} = \frac{a^2-a-1}{2}$$

$$\boxed{C.E.: a \neq 0, a \neq -1, a \neq 1}$$

Question 3

(1) C.E. :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ 6-3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \\ 3(2-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0, x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

(2) $$\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2-4}+\frac{3}{6-3x}$$
$$= \frac{1}{x}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(2-x)}$$
$$= \frac{1}{x}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2}$$
$$= \frac{(x-2)(x+2)-3x-x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{x^2-4-3x-x^2-2x}{x(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{-4-5x}{x(x-2)(x+2)}$$
$$= -\frac{4+5x}{x(x-2)(x+2)}$$

(3) $R(x)=0 \Leftrightarrow 4+5x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$.

(4) $R\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4+\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-4\right)} = -\frac{\frac{13}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-15}{4}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{8}{15} = \frac{52}{15}$,

$R(-2)$ n'existe pas !

$R\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{4+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}(3-4)} = \frac{4+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}+15}{3}$