

Durée : 60'

Calculatrice non autorisée

## Question 1

10 points

Les dimensions d'un rectangle sont  $l = \sqrt{24} - \sqrt{8}$  et  $L = \sqrt{54} + \sqrt{18}$ . Calculer l'aire et le périmètre de ce rectangle et mettre les résultats sous la forme la plus simple !

$l =$	$2\sqrt{6}$	$-$	$2\sqrt{2}$	$=$	$2$	$(\sqrt{6} - \sqrt{2})$													
$L =$	$3\sqrt{6}$	$+$	$3\sqrt{2}$	$=$	$3$	$(\sqrt{6} + \sqrt{2})$													
Donc l'aire du rectangle est:																			
$A =$	$l \cdot L$	$=$	$2 \cdot 3 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$																
		$=$	$6 \cdot (6 - 2)$																
		$=$	$24$																
Le périmètre du rectangle est:																			
$P =$	$2l + 2L$	$=$	$4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 6(\sqrt{6} + \sqrt{2})$																
		$=$	$4\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2}$																
		$=$	$10\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$																

## Question 2

18 (=4+6+8) points

Comparer les nombres donnés dans les cas suivants et justifier la réponse :

(1)  $a = 7$ ,  $b = 5\sqrt{2}$  et  $c = 4\sqrt{3}$

$a^2 =$	$7^2$	$=$	$49$																
$b^2 =$	$25 \cdot 2$	$=$	$50$																
$c^2 =$	$16 \cdot 3$	$=$	$48$																
Donc :																			
			$c < a < b$																
			$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 < 5\sqrt{2}$																

(2)  $d = \sqrt{5} - 2$  et  $e = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
 d \leq e &\Leftrightarrow \sqrt{5} - 2 \leq \sqrt{6} - \sqrt{5} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{5} + \sqrt{5} \leq \sqrt{6} + 2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{5}}_+ \leq \underbrace{\sqrt{6} + 2}_+ \quad |()^2 \\
 &\Leftrightarrow 4 \cdot 5 \leq 6 + 4\sqrt{6} + 4 \\
 &\Leftrightarrow 20 \leq 10 + 4\sqrt{6} \quad | -10 \\
 &\Leftrightarrow 10 \leq 4\sqrt{6} \quad | :2 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{5}_+ \leq \underbrace{2\sqrt{6}}_+ \quad |()^2 \\
 &\Leftrightarrow 25 \leq 24 \quad \text{FAUX !} \\
 \text{Donc : } d > e, \text{ c.-à-d. } \sqrt{5} - 2 > \sqrt{6} - \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

(3)  $f = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 1}$  et  $g = \frac{2\sqrt{2} + 1}{2(\sqrt{2} - 1)}$

$$\begin{aligned}
 f \leq g &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \leq \frac{(2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2}{3 - 1} \leq \frac{4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2 \cdot (2 - 1)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} \leq \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} \quad | \cdot 2 \\
 &\Leftrightarrow \cancel{5} + 3\sqrt{3} \leq \cancel{5} + 3\sqrt{2} \\
 &\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \leq 3\sqrt{2} \quad | :3 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2} \quad \text{FAUX !} \\
 \text{Donc } f > g
 \end{aligned}$$

Autre solution : voir dernière page !

## Question 3

32 (=9+8+7+8) points

Résoudre les équations suivantes et écrire l'ensemble de solutions :

(1)  $3(2x-3)(x-2) = x^3 - 2x^2$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 3(2x-3)(x-2) = x^2(x-2) \\
 &\Leftrightarrow 3(2x-3)(x-2) - x^2(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)[3(2x-3) - x^2] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-2)(6x-9-x^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -(x-2)(x^2-6x+9) = 0 \\
 &\Leftrightarrow -(x-2)(x-3)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x-2=0 \text{ ou } x-3=0 \\
 &\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=3 \\
 &S = \{2, 3\}
 \end{aligned}$$

(2)  $\frac{7x-14}{20} - \frac{8-9x}{20} = 7 - 2\left(\frac{x}{4} + \frac{9x+4}{8}\right)$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{7x-14}{20} - \frac{8-9x}{20} = 7 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{9x+4}{2}\right) \\
 &\Leftrightarrow \frac{70x-140}{20} - \frac{8-9x}{20} = \frac{140}{20} - \frac{10x}{20} - \frac{5(9x+4)}{20} \quad \cdot 20 \\
 &\Leftrightarrow 70x-140-8+9x = 140-10x-45x-20 \\
 &\Leftrightarrow 79x-148 = 120-55x \\
 &\Leftrightarrow 134x = 268 \quad |:134 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \\
 &S = \{2\}
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \sqrt{2}(x+2) = 2x - 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 2x - 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - 2x = -2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{2}x = 5\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x(2 - \sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \quad | : (2 - \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{2} + 10}{4 - 2} = \frac{5(\sqrt{2} + 1)}{2} = 5(\sqrt{2} + 1)$$

$$(4) \quad (a^2 - 5)(a^2 - \sqrt{8}a) = 2(5 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 5)(a^2 - \sqrt{8}a) - 2(5 - a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 5)(a^2 - \sqrt{8}a) + 2(a^2 - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 5)(a^2 - \sqrt{8}a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad a^2 - \sqrt{8}a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 5 \quad \text{ou} \quad a^2 - 2\sqrt{2}a + \sqrt{2}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{5} \text{ ou } a = -\sqrt{5} \text{ ou } (a - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{5} \text{ ou } a = -\sqrt{5} \text{ ou } a - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{5} \text{ ou } a = -\sqrt{5} \text{ ou } a = \sqrt{2}$$

$$S = \{\pm\sqrt{5}, \sqrt{2}\}$$

Question 2

(3) Autre solution :

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1} \leq \frac{2\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-1) \leq (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2) \leq 2\sqrt{6}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2\sqrt{6}}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-4 \leq \cancel{2\sqrt{6}}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{2} \leq 3\sqrt{3}+3 \quad |:3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq \sqrt{3}+1 \quad |(\ )^2$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq 3+2\sqrt{2}+1$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 2\sqrt{2} \quad |:2$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{2} \quad |(\ )^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 2 \quad \text{FAUX !}$$

$$\text{Donc : } \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1} > \frac{2\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}-1)}$$

G. Lorang